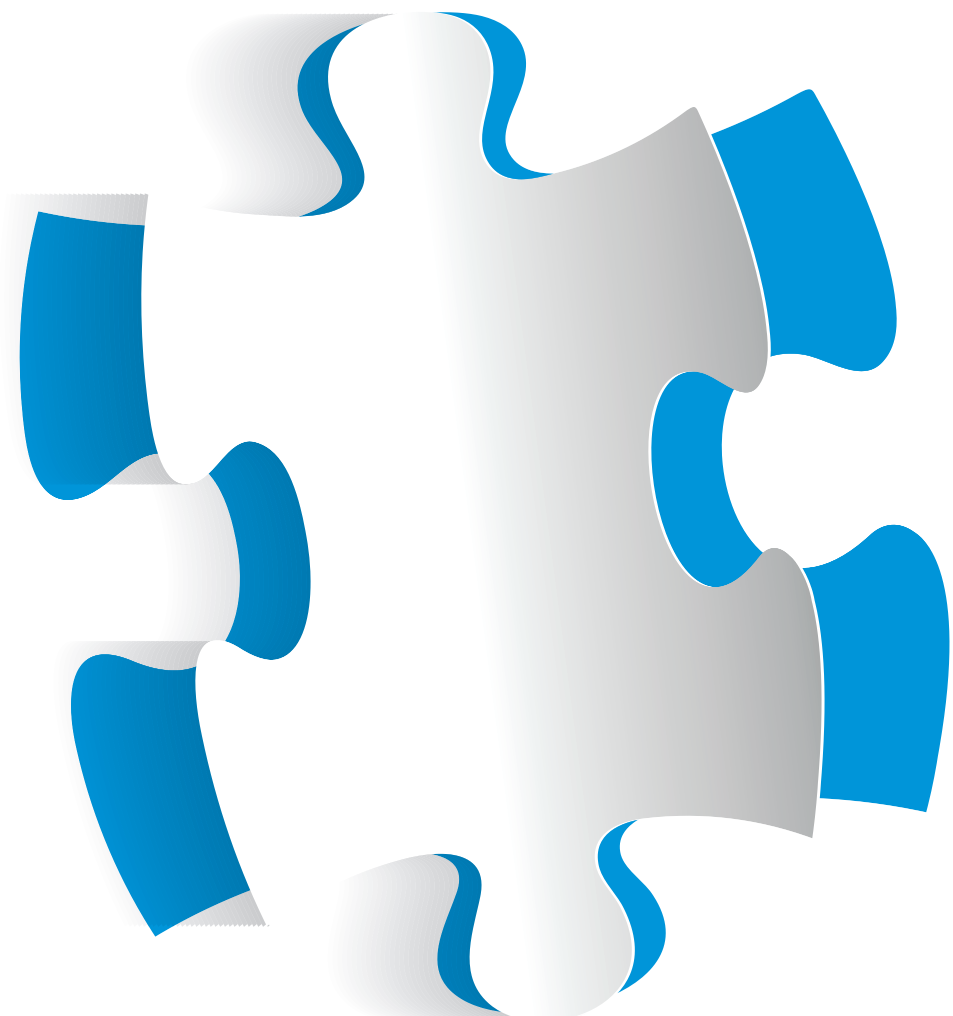
교사용 지도서

고|등|학|교

확률과 통계



신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

고 등 학 교

확률과 통계

교사용 지도서

(주)지학사

머리말

현대 과학 문명은 미처 예상하지 못한 분야까지 급속도로 발전하고 있으며, 그 발전의 중심에는 언제나 수학이 자리해 왔습니다. 이러한 상황 가운데 수학 교육의 중요성은 더욱 부각되고 있습니다. 하지만 수학은 일반적으로 어려운 교과로 인식되기 때문에 하고자 하는 의욕이 있음에도 효율적인 학습이 이루어지지 않는 경향이 많습니다. 그 이유는 여러 가지가 있지만 다음과 같이 두 가지로 요약할 수 있습니다.

첫째, 방법론의 문제입니다. 수학은 어느 교과보다도 체계적이고 논리적이기 때문에 단계적인 학습을 통하여 단원 상호 간의 연계적 이해가 이루어져야 합니다. 또한 수학은 누적적인 학문입니다. 오늘날의 수학은 오래전부터 발견되고 발전해 온 수학을 기초로 이루어져 있으므로 이를 무시하면 수학 학습은 마치 사상누각이 되는 것입니다. 따라서 수학은 반드시 기초부터 시작해야 하고, 이를 바탕으로 체계적이고 논리적으로 확장해 나가야 합니다. 그러나 수학을 학습하는 데 이와 같은 수학의 특징을 중요하지 않게 여기는 경향이 있습니다.

둘째, 응용력의 문제입니다. 이미 언급했듯이 수학은 논리적인 전개를 바탕으로 합니다. 그러므로 체계적인 이해를 전제로 하지 않은 단순한 암기와 기계적인 응용은 심도 있는 수학 학습에 한계를 불러옵니다. 즉, 어떠한 문제가 주어졌을 때, 문제의 성격과 해결 과정에 대한 철저한 사고 없이 문제 유형과 공식을 대응하여 해결하려는 식의 요령은 오히려 다양한 문제에 적용하는 데 한계를 가져오고 수학 학습을 보다 어렵게 느끼게 합니다.

본 교사용 지도서는 위와 같은 점들을 고려하여 단원 간의 연계와 원리의 이해 및 적용에 중점을 두고 편찬하였습니다. 그리고 선생님께서 학생들에게 수학을 지도할 때, 학생들이 보다 흥미와 관심을 가지고 쉽게 이해할 수 있도록 교과서 체계에 맞추어 구성하였습니다. 아울러 교과서의 활용에 도움이 되는 사항들을 함께 수록하였으며, 구체적인 활용 방법은 따로 설명하였습니다.

교육 현장에 계신 선생님께서 본 교사용 지도서를 효율적으로 사용하여 보다 알찬 수학 교육의 결실을 거두기 바랍니다.

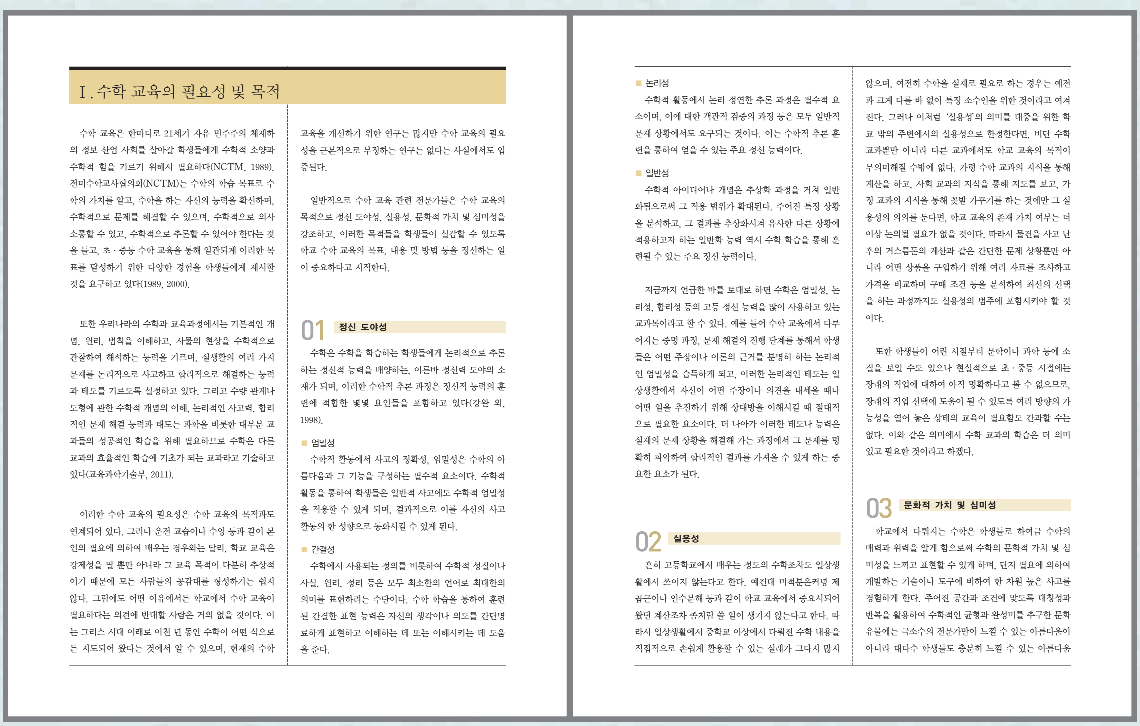
지은이 씀

구성과 특징

교사용 지도서는 크게 총론과 각론으로 나누어, 교사들의 전문성 신장에 도움을 줄 수 있는 내용과 교과서의 각 단원 지도에 유용한 자료들을 제공하였습니다.

총론

수학 교육의 필요성 및 목적, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해, 수학 교과서의 개발 동향, 수학적 문제 해결, 수학과 평가의 특징 및 방법, 좋은 수업의 의미, 수학과 수업 평가 등을 설명하였고, 교과서의 구성과 연간 지도 계획안을 제시하였습니다.



Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초 · 중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

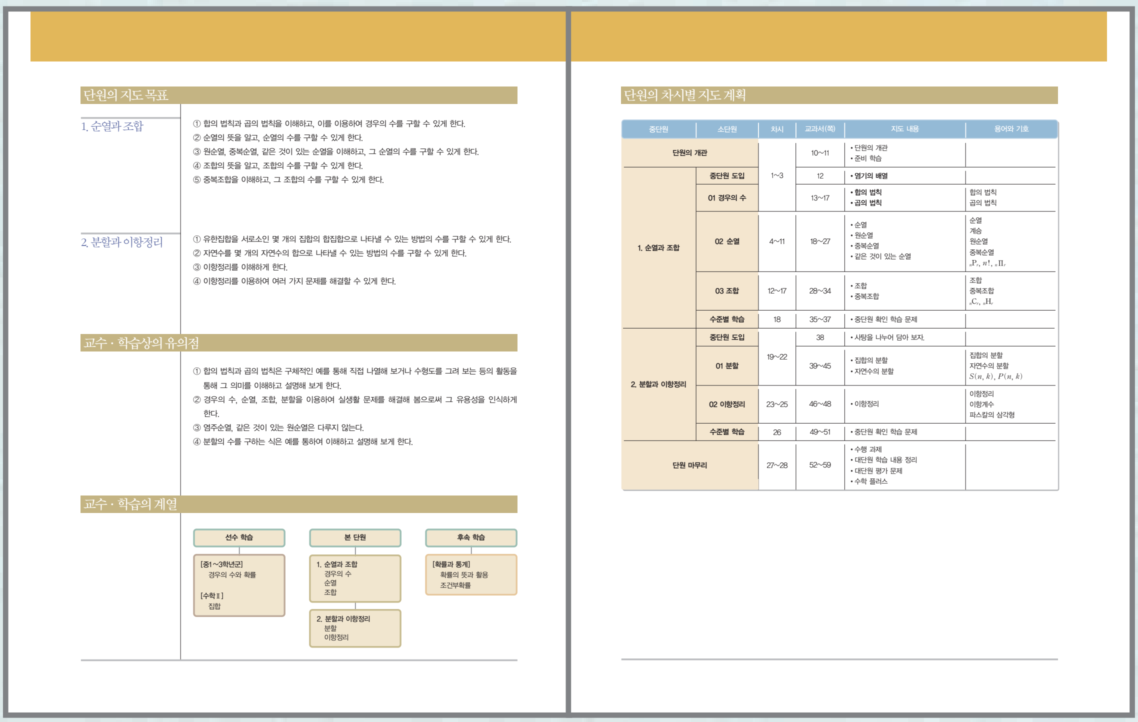
또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초 · 중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

각론

단원별 지도에 참고할 수 있는 지도 목표, 교수 · 학습상의 유의점, 지도 계획, 이론적 배경, 차시별 교수 · 학습 과정안(예시), 교과서 내용의 해설과 문제 풀이 및 교과서 내용 지도 시 유용한 자료들을 제시하였습니다.



단원의 지도 목표

1. 순열과 조합

① 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.
② 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있게 한다.
③ 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있게 한다.
④ 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있게 한다.
⑤ 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

2. 분할과 이항정리

① 유한집합을 서로소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있게 한다.
② 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있게 한다.
③ 이항정리를 이해하게 한다.
④ 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통해 직접 나열해 보거나 수형도를 그려 보는 등의 활동을 통해 그 의미를 이해하고 설명해 보게 한다.
② 경우의 수, 순열, 조합, 분할을 이용하여 실생활 문제를 해결해 봄으로써 그 유용성을 인식하게 한다.
③ 염주순열, 같은 것이 있는 원순열은 다루지 않는다.
④ 분할의 수를 구하는 식은 예를 통하여 이해하고 설명해 보게 한다.

교수 · 학습의 계열

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	10~11	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 순열과 조합	중단원 도입		12	• 염기의 배열	
	01 경우의 수		13~17	• 합의 법칙 • 곱의 법칙	합의 법칙 곱의 법칙
	02 순열	4~11	18~27	• 순열 • 원순열 • 중복순열 • 같은 것이 있는 순열	순열 계승 원순열 중복순열 ${}_nP_r$, $n!$, ${}_n\Pi_r$
	03 조합	12~17	28~34	• 조합 • 중복조합	조합 중복조합 ${}_nC_r$, ${}_nH_r$
	수준별 학습	18	35~37	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 분할과 이항정리	중단원 도입	19~22	38	• 사탕을 나누어 담아 보자.	
	01 분할		39~45	• 집합의 분할 • 자연수의 분할	집합의 분할 자연수의 분할 $S(n, k)$, $P(n, k)$
	02 이항정리	23~25	46~48	• 이항정리	이항정리 이항계수 파스칼의 삼각형
	수준별 학습	26	49~51	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		27~28	52~59	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 지도 목표

교육과정에 명시된 대단원의 지도 목표를 중단원별로 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

대단원의 지도에 있어서 유의해야 할 사항 중 교육과정에 명시된 내용을 설명하였습니다.

교수 · 학습의 계열

단원과 관련하여 선수 학습과 후속 학습의 연계성을 제시하였습니다.

단원의 차시별 지도 계획

중단원과 소단원별 교과서 쪽수, 지도 내용, 교육과정에 명시된 용어와 기호 등을 쉽게 알아볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.

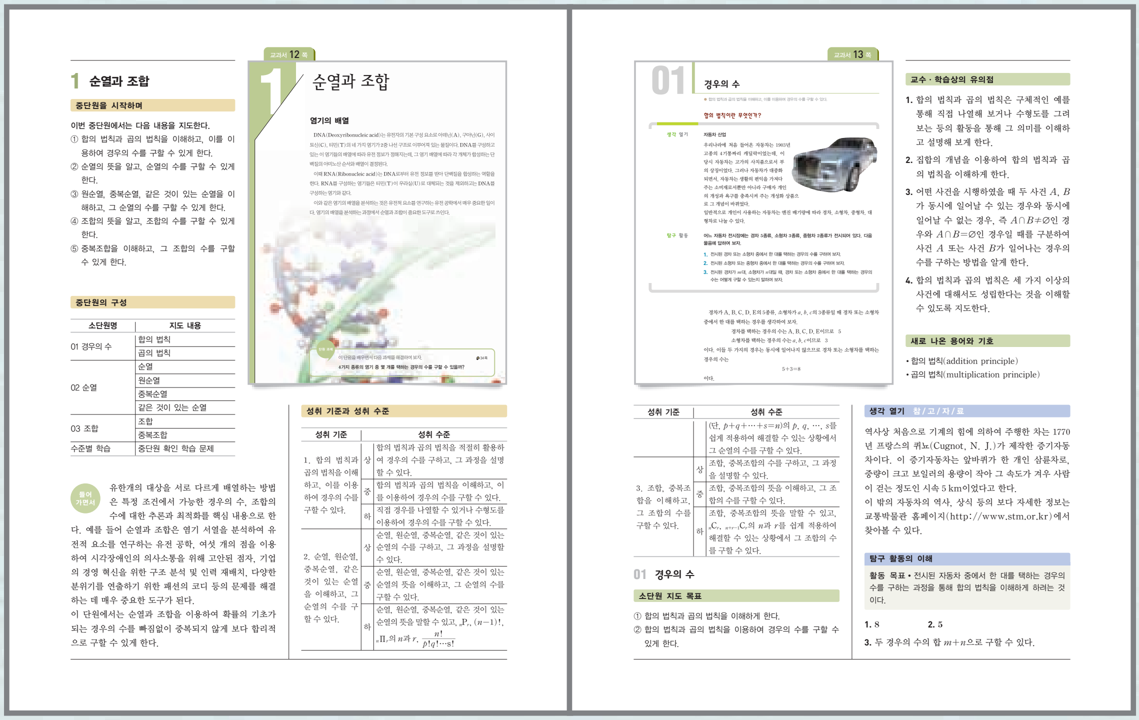
단원의 이론적 배경

단원의 이론적 배경과 이론이 발전되어 온 수학사적 배경을 설명하였습니다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

두 개의 차시에 해당하는 교수 · 학습 과정안을 예로 제시하였습니다.

구성과 특징



중단원을 시작하며

교육과정에 명시된 중단원의 지도 목표를 제시하였습니다.

중단원의 구성

중단원의 소단원명과 각 소단원의 지도 내용을 제시하였습니다.

들어가면서

중단원 도입에 소개된 실생활 소재와 단원과의 관련성을 설명하였습니다.

성취 기준과 성취 수준

교육과정에 제시된 단원의 성취 기준 및 상, 중, 하 수준별 성취 수준을 제시하였습니다.

소단원 지도 목표

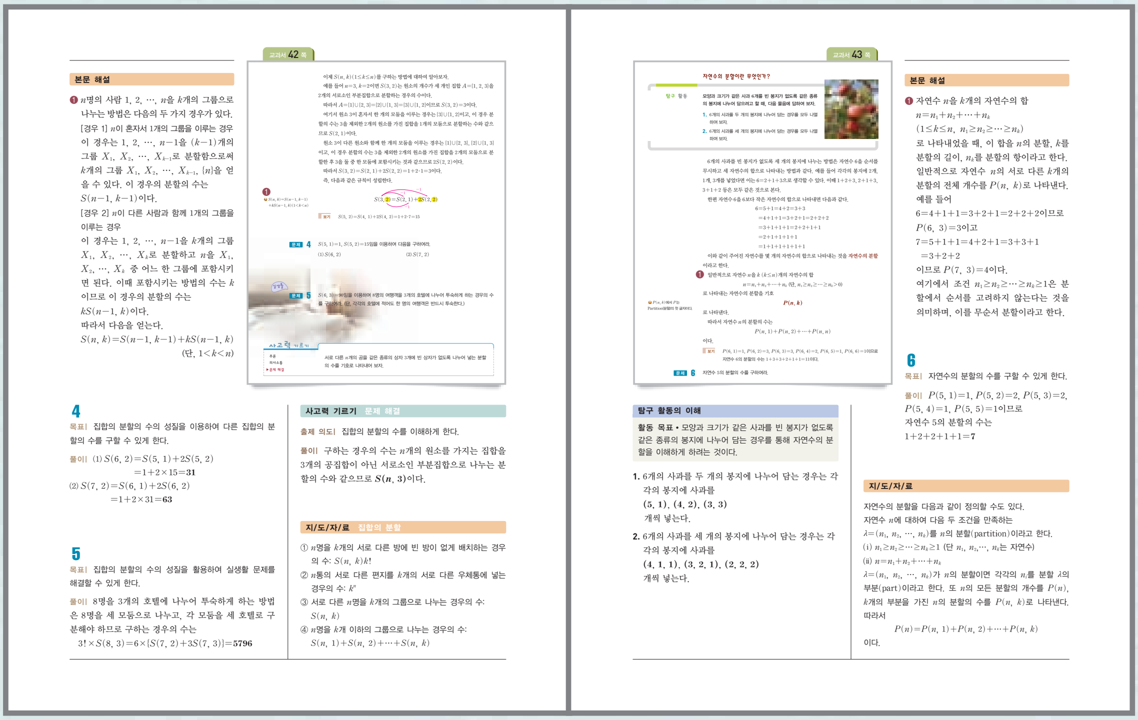
소단원별로 세부적이고 구체적인 지도 목표를 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

소단원의 지도에 있어서 특별히 유의해야 할 사항을 정리하였습니다.

새로 나온 용어와 기호

소단원에서 새로 배우게 될 교육과정에 명시된 용어와 기호를 제시하였습니다.



생각 열기 참고 자료

생각 열기와 관련된 내용에 대한 충분한 설명을 제시하였습니다.

탐구 활동의 이해

탐구 활동의 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

본문 해설

교과서에 제시된 학습 내용을 해설하고, 보다 자세한 설명을 덧붙였습니다.

지도 자료

내용 지도 시 필요한 보충 설명이나 기호에 대한 설명을 제시하였습니다.

읽기 자료

수학사, 생활 속 수학 등 각종 읽기 자료를 제시하였습니다.

문제의 해설

교과서 본문에 있는 모든 문제의 출제 의도 및 지도 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

수행 과제

수행 과제의 출제 의도와 구체적인 예시 답안을 제시하였습니다.

대단원 학습 내용 정리

단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하였습니다.

대단원 평가 문제

단원 마무리에 나온 대단원 평가 문제의 지도 목표 및 풀이를 제시하였습니다.

수학 플러스

단원과 관련된 수학, 과학, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 등의 이야기를 소개하였습니다.

그들과 이야기를 나누며

가장 크게 깨달은 것은 자기가 진정으로

하고 싶어하는 것이 무엇인지 깨닫는다면

그 일을 미래의 어느 날로 미루지 말고,

또 그 일을 할 수 없는 이유들을 찾지 말고

'바로 지금' 시작해야 한다는 것이다.

흘러가는 시간은 언젠가 이룰 꿈을 위해

마냥 기다려주지 않으니까.

– 용서해의 《삶의 마지막 축제》 중에서 –

차례

총론

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초 · 중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초·중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미 있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

이 들어 있으며, 매우 간단한 수학적 원리를 활용하여 흥미진진한 게임을 하는 예에서도 그 심미적 가치를 쉽게 찾을 수 있다. 또한 수학의 아름다움이나 매력은 미적분의 기본 정리에서부터 신라 시대의 술병에 이르기까지 다양한 대상과 수준에서 발견될 수 있다. 이와 같은 풍부한 자료와 유연한 해석을 통하여 문화적 가치, 수학 고유의 심미성을 적절한 수준에서 확인하는 경험은 고등학교를 떠남과 동시에 수학과 멀어지는 대부분의 학생들에게 반드시 필요하다.

수학 교육에서 놓치지 말아야 하는 것은 모든 건전한 시민을 위한 공통적으로 기본적이면서도 필수적인 수학 내용이 무엇인가를 분명히 하는 것이다. 따라서 수학 교육은 모든 학생들에게 꼭 필요한 내용이 무엇인지 명확히 정할 필요가 있으며 그것이 다양한 상황과 측면에 적용되면서 철저히 그리고 깊이 있게 이해되도록 돕는 것이 필요할 것이다. 궁극적으로 교육의 목적은 학생의 잠재력을 계발하고, 건전한 사회인으로서의 역할을 수행하도록 돕는 데 있다. 다른 교과 교육이 그러하듯이 수학도 현대 사회와 미래 사회를 살아갈 건전한 시민으로서 그 사회를 지탱하는 문명적, 문화적 기저 중에서 수학을 기반으로 하는 것에 대하여 수학적으로 이해하는 눈을 기르기 위해 배우는 것이다.

결국 수학을 가르쳐야 하는 이유는 수학의 내용이 인간과 환경에 관한 각종 현상을 보는 안목과 수단을 제공해 주기 때문이다. 수학적 안목의 고양이라는 것은 수학의 실용성과도 연결될 수 있지만 그보다는 경제 · 사회 · 문화 등 제 분야에 녹아 있는 수학적 현상이나 원리 · 모델 등을 파악하여 이들 분야를 더욱 깊이 있고 창의적인 방법으로 이해할 수 있도록 하는 것을 의미한다. 또한 수학은 어떤 문제를 여러 가지 수학적 방법으로 해결하게 함으로써 문제 해결의 지혜를 기르고, 한 현상에 담긴 수학적 질서를 이해하기 위해 배우며, 사물의 법칙과 질서에 대한 수학적 이해력을 기르기 위해 배운다고도 할 수 있다. 즉, 조각상의 무게중심, 물건 구매, 유전자의 배열, 황금 비율, 투자에 따른 수익률, 건축, 디지털의 세계, 자동차의 속도와 회전 등 일상생활의 다양한 모습들을 수학적으로 이해하기 위해서 수학을 배우는 것이다(황혜정 외, 2012).

II. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해

2009년 12월 23일에 교육과정 총론이 발표됨에 따라 2011년 8월 9일, 2009 개정 교육과정에 따른 '수학과 교육과정'이 최종 확정 및 공표되었다. 이 교육과정은 2013년부터 현장에 적용되고 있으며, 이에 대한 개정 배경 및 방향, 창의성 강조를 위한 수학적 과정(mathematical process)의 반영, 교육과정 문서의 구성 및 체제, 학교급별 주요 내용 변화에 대해 간략히 살펴보면 다음과 같다.

01 개정의 기본 방향

새로운 수학과 교육과정에서는 우선적으로 2009 개정 교육과정 총론의 취지에 부합하고 기존 수학과 교육과정의 문제점을 극복할 수 있는 새로운 교육과정의 성격, 목표, 내용 등을 개발하는 데 주력하였다. 특히 미래 사회에서 요구되는 핵심 역량의 주요 요소인 창의 중심의 교육과정 운영 및 교과용 도서 구현이 가능하도록 이에 따른 교육 목표와 내용을 개발하는 데에 초점을 두었으며, 다음의 항목을 구현하고자 하는 것이 새로운 교육과정의 주요 개발 방향이다.

가. 수학 교과 내용의 양 20 % 경감

2009 개정 교육과정 총론의 '교육과정 편성 · 운영 지침'의 주요 변화 내용 중 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 대비 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 내용 20 % 경감의 배경이 될 수 있는 근거는 학교의 특성, 학생 · 교사 · 학부모의 요구 및 필요에 따라 학교가 자율적으로 교과(군)별 20 % 범위 내에서 시수를 증감하여 운영할 수 있는 데 있다(교육과학기술부, 2009). 2009 개정 교육과정 총론에서는 각 교과별로 교육과정의 성취 기준을 개발할 경우 학습량이 증가하여 교육 내용의 적정화를 저해할 우려가 있음을 염두에 두고, 교과별 교육과정 개발 시 현행 교육과정 대비 20 %의 내용이 경감되어야 함을 적극 주장하였다(박순경, 2010). 즉, 기준 수업 시수를 감안하되 교과 내용의 양은 현행 교육과정보다 20 % 정도 감축한다고 상정하고 최적한 학습 내용을 정선함으로써 보다 질 높은 교과 교육과정을 추구하도록 하였다.

나. 수학적 창의성 강조에 따른 수학적 과정

(1) 수학적 창의성의 의미

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 수학적 과제를 해결하는 과정에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 산출하거나 새로운 관점에서 과제를 탐구하고 지식을 구성하는 능력을 의미한다. 여기서 수학적 과제는 학생들의 수학적 능력 계발을 위한 내용적 배경을 제공하는 것으로서, 예를 들어 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 활동 등을 망라한 것이다.

이와 같은 수학적 창의성을 계발하기 위해서는 우선 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성해 주어야 한다. 이와 같은 학습 상황에서 학생들은 수학을 학습하고 행하는 과정에서 과제에 대한 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 과제 해결에 대한 집착성과 끈기 등과 같은 창의성의 정의적 측면도 발전시키게 될 것이다.

한편 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 학교 수준에서의 수학적 창의성을 의미하기 때문에, 학습자가 수학적 추론과 통찰을 활용하여 기존의 지식과 경험을 유의미한 방법으로 분석 · 연결 · 통합하는 과정에서 창의성이 발현된다고 본다. 또한 학교 수학을 통해서 수학적 창의성을 계발할 때에는 창의적인 사고와 관련되는 일련의 과정을 수학적으로 의사소통하고 표현하는 능력도 신장시켜야 할 것이다.

(2) 수학적 과정의 의미 및 반영

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 말하는 '수학적 과정'은 수와 연산, 도형 등의 내용 영역에서 다루는 수학적 주제를 이해하고 습득하는 데에서, 그리고 그러한 수학적 주제를 활용하여 다양한 현상을 이해하고 문제를 해결하고 의사소통하는 데에서 활성화되어야 하는 능력을 의미한다. 다시 말해서 '수학적 과정'은 학생들 주변의 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결할 때 활성화되어야 하는 수학의 과정적 기능을 의미하며, '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통' 등을 구성 요소로 가지는 개념으로 정의하였다.

여기서 '수학적 문제 해결'은 수학의 문제나 문제적 상황에서 그 해를 찾아내기 위하여 이미 알고 있는 수학의 개념, 원리, 법칙 등의 지식이나 기능을 바탕으로 수학적 발견술이나 전략 등의 다양하면서 종합적인 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. '수학적 추론'은 수학적 현상이나 사실 등을 대상으로 그와 관련된 잠재적인 수학적 규칙성이나 원리, 구조 등에 결론적으로 이르기 위한 논리적 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. 그리고 '수학적 의사소통'은 수학의 아이디어나 생각 등을 수학적 표현 수단을 통하여 서로 공유하고 학습하게 되는 과정을 수행하는 것을 의미한다(NCTM, 2000).

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 구성 체제를 살펴보면, '목표', '내용', '교수 · 학습 방법', '평가' 등의 순으로 구성되어 있다. 학교에서 구체적으로 학습해야 할 수학 성취 기준은 '내용'에서 학년(군)별로 제시되어 있다. 한편 '수학적 과정'의 하위 구성 요소로 설정한 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'은 우리나라의 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되어 온 사항이다. 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서도 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통을 강조하고 있다.

학교의 수학 교수 · 학습의 실질적인 모습을 결정한다고 할 수 있는 교과서의 경우, 그 내용은 주로 수학과 교육과정의 '내용'에 제시되어 있는 성취 기준을 중심으로 구성된다. 현행 수학과 교육과정과 같이 '목표'와 '교수 · 학습 방법'에서 '수학적 과정'과 관련된 제 측면을 과거와 같이 선언적으로만 제시하는 것은, '수학적 과정'과 관련된 제 측면들이 교과서의 내용 구성에 배경으로서 암묵적으로 스며들게 되는 장점이 있다고 볼 수 있지만, 학생들에게 적극적이고 명확하게 지도되지 않는다는 한계점 또한 지니고 있다.

따라서 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 현행 수학과 교육과정의 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 선언적으로 제시되고 있는 '수학적 과정'의 제 측면들을 보다 구체적인 성취 기준을 가지고 '내용'의 진술에 포함시킴으로써 교과용 도서 및 수업 상황에서 수학적 과정과 관련된 제 측면들을 더욱 적극적이고 분명히 다루게 하고 있다. 한마디로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'을 '수학적 과정'으로 간주하고, 이를 학습 내용 성취 기준 및 교수 · 학습상의 유의점, 그리고 교수 · 학습 방법 등에 반영하였다.

수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통의 특징은 각각 다음과 같다.

〈표 Ⅱ-1〉 수학적 과정의 요소 및 특징

수학적 문제 해결
가. 주어진 문제의 해결에 필요한 정보를 확인 또는 보완하고 적절한 전략이나 사고 과정을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
나. 수학적인 방법으로 문제 해결의 과정과 결과의 타당성을 설명할 수 있다.
다. 문제 해결 과정이나 완결 후 문제 제기를 통하여 문제 해결을 발전적으로 이끌 수 있다.
라. 문제 해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제 상황에 적용할 수 있다.

수학적 추론
가. 수학적 추측이나 주장을 만들고, 수학적 지식에 근거하여 이를 정당화할 수 있다.
나. 수학적 아이디어나 사고 과정을 수학적인 방법으로 검증할 수 있다.
다. 수학적 활동에서 다양하고 독창적인 아이디어가 지니는 가치를 인식할 수 있다.
수학적 의사소통
가. 수학적인 방법을 활용하여 자신의 생각을 논리적으로 정확하게 표현하고, 다른 사람을 이해시킬 수 있다.
나. 수학적 활동 중에 자신의 수학적인 생각을 다른 사람과 주고받는 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통하여 자신의 생각을 개선시킬 수 있다.
다. 다른 사람의 수학적 아이디어나 사고 과정을 이해하고 평가할 수 있다.

(3) 학년군제 도입 및 적용

2009 개정 교육과정 총론의 초·중등학교 교육과정 구성의 방침에 의하면 "교육과정 편성·운영의 경직성을 탈피하고, 학년 간 상호 연계와 협력을 통한 학교 교육과정 편성·운영의 유연성을 부여하기 위하여 학년군을 설정한다."라고 규정하고 있다(교육과학기술부, 2009).

현재 2007 개정 교육과정 체제에서는 학년제를 따르고 있다. 즉, 각 학년에서 배워야 할 내용을 학년별로 제시하였다. 반면 학년군제는 학생들이 배워야 할 내용을 학년별이 아니라 몇 개 학년을 묶어서 제시한다. 예를 들어 초등학교 1학년에서 2학년 사이에 학습할 내용을 초등학교 1~2학년군으로 제시하는 것이다.

학년군제 도입에 따른 가장 큰 변화는 학생들의 수준별 학습이다. 학년군제를 실시하는 것은 학생들의 학습 수준의 차이를 인정하는 것이다. 이해가 빠른 학생들은 더 많은 내용을 혹은 더 깊은 내용을 학습할 수 있고, 이해가 느린 학생들은 기본적인 내용을 집중적으로 학습할 수 있다. 학생들은 자신의 흥미나 적성을 고려하여 필요한 수학 교과를 선택할 수 있으며, 이는 학생들의 진로 선택과 관련될 수 있다.

또 다른 변화는 학년군제에서는 다양한 교과서가 사용될 수 있다는 것이다. 교육과정에서 엄격한 학년의 구분이 없어지고 내용이 통합적으로 제시되기 때문에 관련 내용들을 여러 가지 방법으로 재배치할 수 있게 된다. 예를 들어 초등학교 1학년과 2학년에서 학습할 수와 연산 영역을 초등학교 1학년에서 집중적으로 학습하도록 하는 교과서를 구성할 수 있다. 또는 중학교에서 대수와 함수를 밀접하게 관련시켜서 교과서를 구성할 수 있다. 즉, 수학 교과가 가진 특성을 발휘하여 학생들의 창의력을 발달시킬 수 있는 다양한 교과서의 출현이 가능하게 된다.

그러나 학년군제에 따르는 단점들도 충분히 예상되기 때문에 학년군제를 실행하기 위해서는 다음과 같은 사항들에 대한 해결 방안이 모색되어야 한다.

첫째, 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다. 학년제 대신에 학년군제를 실시하는 취지 중의 하나는 학생들의 학습 수준 차를 인정하고 학생들의 수준에 맞는 학습을 통해서 사고 발달과 진로 선택에 긍정적인 효과를 주기 위함이다. 따라서 학생들의 수준에 적합한 수업이 가능한 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다.

둘째, 수준별 수업이 원활히 시행되기 위해서는 적절한 평가 기준이 마련되어야 한다. 학생들의 다양한 진로와 흥미를 고려하여 과목을 이수하고 이에 대한 타당한 평가가 이루어져야 한다.

셋째, 교육과정이 학년군으로 구성되더라도 학년별로 교과서가 어떻게 저술되어야 하는지에 대한 기준이 필요하다.

넷째, 전학생들을 위한 보충 학습 과정 등 교수·학습 방안 및 정책이 마련되어야 한다.

02 수학과 교육과정의 특징

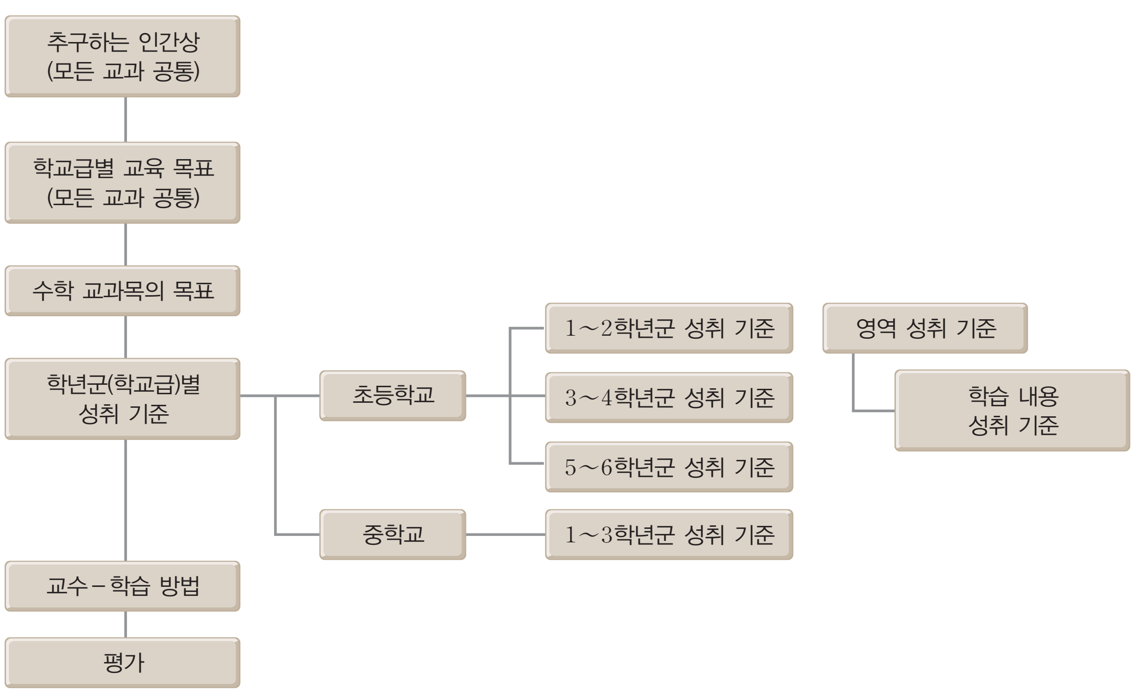
가. 교과목의 구성 및 문서 체제

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교과목은 공통 교육과정과 선택 교육과정으로 구성되어 있으며, 공통 교육과정에는 초등학교 1학년에서부터 중학교 3학년까지 다뤄지는 「수학」 교과목이 해당되며, 선택 교육과정에는 고등학교 1학년에서 3학년까지 다뤄지는 9개 교과목이 포함되어 있다. 선택 교육과정은 ‘기본 과목’, ‘일반 과목’, ‘심화 과목’으로 구성되어 있으며, 일반 과목은 모두 5단위의 6개 선택 과목으로 「수학Ⅰ」, 「수학Ⅱ」, 「확률과 통계」, 「미적분Ⅰ」, 「미적분Ⅱ」, 「기하와 벡터」로 구성되어 있다. 그 밖에 기본 과목에는 「기초 수학」, 심화 과목에는 「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」가 포함된다.

공통 교육과정		
1. 수학		
선택 교육과정		
〈기본 과목〉	〈일반 과목〉	〈심화 과목〉
1. 기초 수학	1. 수학 I 2. 수학 II 3. 확률과 통계 4. 미적분 I 5. 미적분 II 6. 기하와 벡터	1. 고급 수학 I 2. 고급 수학 II

[그림 Ⅱ-1] 수학과 교육과정의 교과목 구성

공통 교육과정 기간에 다뤄지는 수학 교과목의 문서 체제를 예로 들어 도식화하면 다음과 같으며, 선택 교육과정 기간의 9개 교과목의 문서 체제도 이와 동일한 방식으로 구성되어 있다. 여기서 각 교과목의 ‘3. 목표’는 2007 개정 교육과정의 ‘1. 성격’과 ‘2. 목표’의 두 부문의 진술을 통합하여 진술하고 있다. 특히 「수학」 교과목의 목표의 경우, 예전에 분리하여 제시되어 있던 초등학교와 중학교의 교육 목표가 통합, 진술되었다.



[그림 Ⅱ-2] 수학 교과목의 목표 및 성취 기준

나. 영역 구분의 변경

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 제7차 개정의 것과 마찬가지로, 학교급별 특성을 감안하여 초등학교와 중학교 각각의 내용 영역을 구분하였으며, 초등학교의 경우 '규칙성과 문제 해결' 영역을 '규칙성'으로 변경하였다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 모든 학교급 및 모든 수학 교과목에 걸쳐 수학적 과정의 요소로서 문제 해결 활동을 전 영역 및 세부 내용에 걸쳐 적극 반영하도록 강조하고 있기 때문이다.

2007 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중·고등학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	확률과 통계		확률과 통계
	규칙성과 문제 해결		기하

2009 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	규칙성		확률과 통계
	확률과 통계		기하

[그림 Ⅱ-3] 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 영역명

03 학교급별 내용 변화

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 학교급별, 학년군별 내용의 변화는 기본적으로 학교 현장에서의 창의성 활동을 실제적이고 효율적으로 실행하기 위한 것으로, 학습 내용의 적정화 및 학년별 내용 분량이 조정되었다. 수학과 교육과정의 총 10개 교과목에 대한 주요 변화 내용을 학교급별로 살펴보면 다음과 같다.

가. 초등학교

(1) 수와 연산

초등학교의 수와 연산 영역에서 가장 큰 변화로는 자연수 및 분수의 지도 시기를 재조정하고, 계산 연습을 통한 단순한 연산 기능 신장이 아니라 연산 감각 및 양적 추론 능력을 강화한 점을 들 수 있다. 또한 사칙연산의 계산 결과를 어림한 후 어림한 값을 확인하거나 소수의 복잡한 계산에 있어서 계산기를 도입하여 활용할 수 있게 함으로써, 지나친 계산 연습에서 기인하는 학습 부담을 경감하고자 하였다.

(2) 도형

2007 개정 교육과정에서 평면도형의 각 구성 요소에 대한 학습 후 도형의 언어적이고 명시적인 정의를 통해서 도형 개념을 도입하는 방식을 대신하여, 2009 개정 교육과정에서는 도형의 모양 인식 및 분류 활동을 토대로 하여 도형 및 그 구성 요소에 대한 직관적인 이해와 더불어 이름을 먼저 학습한 후 점차 분석적, 명시적으로 도형의 개념 및 성질을 학습할 기회를 제공하였다. 한편 2007 개정 교육과정에서 분산되어 지도되었던 각, 삼각형, 사각형 관련 단원의 내용들을 각각 통합적으로 취급함으로써 학생들의 개념 구조의 체계적 형성을 돕고자 하였다. 또 초등학생의 인지 수준에 적합하지 않은 내용으로 간주되는 사각형의 포함 관계나 수학 학습의 계열상 초등 수학에서 다루는 것이 적합하지 않은 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 및 회전체를 삭제하였다.

(3) 측정

측정 영역은 실생활과 밀접하게 관련되어 있으므로, 실생활과 관련지어 측정의 필요성을 인식하게 하고 측정 및 어림 활동을 통하여 양감을 기르는 데 중점을 두었다. 측정 영역에서의 계산은 측정 결과 간의 단순 연산이나 단위 환산은 축소하고, 측정의 관점에 중점을 두도록 하였다. 길이, 무게, 들이, 넓이의 양감을 기르는 데 중점을 두고, 측정 영역에서 합과 차를 계산하거나 단순한 단위 환산 연습은 약화하였으며, 들이 및 무게의 덧셈과 뺄셈은 실생활 문제 상황을 통하여 다루도록 하였다. 또한 부피의 양감을 강조하고 부피의 단위 사이의 환산이나 부피와 들이의 단위 환산은 삭제하여 학습량을 감축하였다.

(4) 규칙성

2007 개정 교육과정에서 '규칙성과 문제 해결' 영역은 주로 문제 해결 방법, 규칙 찾기, 비와 비율, 비례 등을 포괄하였다. 2009 개정 교육과정에서는 '문제 해결'이 다른 영역의 내용적 성격과 달리 과정적 성격을 띠고 있으며 수학 교과 전 영역에서 고루 지도되어야 한다는 취지에서 '문제 해결' 부분은 전 영역으로 재편하고, 영역명은 '규칙성'으로 설정하였다. 규칙성 영역의 주요 변화로는 각 학년에 분산되어 있던 규칙 찾기 활동을 통합하고 탐구 활동 및 놀이를 활용하고자 하였다. 비율 중 할, 푼, 리나 연비는 그 중요도 및 쓰임새를 재고하여 삭제하였으며, 방정식은 중학교의 학습 내용과 중복하여 다루어지고 있으므로 초등학교에서는 삭제하고 중학교의 '일차방정식'으로 이동 통합함으로써 학습량을 감축하였다.

(5) 확률과 통계

확률과 통계 영역에서의 가장 큰 변화는 줄기와 잎 그림, 경우의 수와 확률을 중학교로 이동 통합하고, 초등학교에 가능성의 개념을 도입한 것이다. 줄기와 잎 그림은 학습량 감축 및 학문 내에서의 개념 간 관련성을 고려하여 중학교의 통계 영역과 의미 있게 연결되도록 상향 이동하였다. 또한 경우의 수와 확률은 초등학교와 중학교에서 내용 중복 및 학습량 감축의 취지에서 중학교로 이동 통합하였고, 확률 개념의 계열적 구성이라는 측면에서 가능성이라는 개념을 초등학교 5~6학년군에 도입하였다.

이상으로 초등학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 시간의 덧셈과 뺄셈 약화 (3～4학년군)
- 사각형의 포함 관계 삭제 (3～4학년군)
- 할, 푼, 리 삭제 (5～6학년군)
- 등식의 성질 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 방정식 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 연비의 삭제 (5～6학년군)
- 겉넓이와 부피 통합 및 부피와 들이 사이의 관계 삭제 (5～6학년군)
- 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 삭제 (5～6학년군)
- 회전체 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 가능성 도입 및 확률 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 줄기와 잎 그림 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동

나. 중학교

(1) 수와 연산

수는 수학에서 다루는 대상 중에서 가장 기본이 되는 개념으로서 수의 개념과 연산에 대한 이해는 실생활뿐 아니라 다른 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는 데 필수적이다. 따라서 수와 연산 영역은 수의 개념과 연산에 대한 이해를 높이고 이후의 학습과 연계될 수 있는 필수적인 요소만을 선정하였다. 또한 집합은 고등학교로 상향 이동하였고, 근삿값은 삭제하였다.

(2) 문자와 식

문자는 생활 주변이나 자연 및 사회 현상을 수학적으로 간단하게 표현하고 의사소통을 원활히 할 수 있게 해준다. 문자와 식 영역에서는 학생들이 자연스럽게 문자를 사용할 수 있도록 문자와 식을 실생활 문제 해결의 맥

락에서 다루게 하고, 수학이 현실 세계의 상황과 밀접한 관련이 있다는 것을 학생들에게 인식시켜야 한다. 이를 위해 방정식, 부등식과 그의 활용은 독립적인 중영역이 아닌 하나의 영역에서 통합하여 학습하도록 구성하였다. 또한 방정식과 부등식의 학습에 있어서 용어 사용에 대한 학습자의 부담을 고려하여 필요 이상의 용어 정의를 제한하였다.

⑶ 함수

2007 개정 교육과정에서는 제7차 교육과정에서 정비례와 반비례를 통해 함수 개념을 도입하면서 발생했던 문제점을 보완하기 위해, 정비례와 반비례를 초등학교 6학년으로 이동시키고 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계'로 도입하고, 실생활을 활용하여 함수 개념의 효용성을 알게 하는 것이 필요하다고 하였다(교육과학기술부, 2007). 이런 점에서 볼 때 중학교 수준의 함수 영역은 현실 세계의 상황을 이해하는 도구로서의 함수 개념에 초점을 맞추고, 고등학교 함수에서 여러 영역을 통합하는 아이디어로서 대응의 관점에서 정의된 형식화된 함수 개념으로 확장될 수 있는 기반이 되도록 하는 것이 바람직하다. 이에 2009 개정 교육과정에서는 함수 개념의 도입 방법의 변화를 도모하고, 정의역, 공역, 치역 등의 용어를 삭제하였다.

⑷ 확률과 통계

확률과 통계는 중학교 수학에서 실생활과 관련성이 매우 깊은 영역이다. 중학교에서는 자료의 정리와 표, 그래프의 해석, 통계적 확률과 수학적 확률의 관계, 확률의 계산, 대푯값과 산포도의 내용이 다루어진다. 본 개정안에서는 학생들이 통계를 학습함으로써 분석적이고 비판적인 사고를 도모할 수 있도록 내용의 변화는 최소화하면서, 교수·학습 방법의 변화를 도모하였다. 2007 개정 교육과정과 달라진 내용은 학습량 감축을 위해 '누적도수의 분포'를 삭제하고, 탐색적 자료 분석의 한 방법인 '줄기와 잎 그림'을 도수분포와 그래프 학습 내용에 추가한 것이다.

⑸ 기하

수학 교육에서 증명은 전통적으로 학생들에게 꼭 가르쳐야 하는 주요 대상으로 인식되어 왔다(NCTM, 2000). 그러나 중학교 수학에서의 증명 교육은 기대하는 만큼의 효과를 거두지 못하고 있음이 알려져 있다. 그 이유는 학생들이 기하에서 다루는 개념에 대한 지식이 부족한 탓도 있겠지만, 공리 체계 내에서 논리 규칙에 따라 명제들을 체계적으로 연결시키는 데 어려움을 느끼기 때문이다.

2009 개정 교육과정에서 기하 영역은 학생들이 도형을 탐구하여 기하학적 성질을 이해하고 이를 통해 추론 능력을 신장시키는 것을 목표로 한다. 또한 기하학적 성질을 이해하고 그 지식을 습득하는 방법에 있어서 학생 활동을 중시하고 증명 대신 추측 활동을 강조한다. 이를 위하여 다음 표에서와 같이 2009 개정 교육과정에서는 '증명할 수 있다' 대신 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시하였다.

〈표 Ⅱ-2〉 '추측과 정당화' 강조에 대한 내용 비교

2007 개정 교육과정	2009 개정 교육과정
5 삼각형과 사각형의 성질(2학년) ① 명제의 뜻과 증명의 의미를 이해한다. ② 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명할 수 있다.	5 삼각형과 사각형의 성질 ① 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ③ 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

2009 개정 교육과정에 제시한 '이해하고 설명할 수 있다'는 '정당화(justification)'를 의미하는데, 이는 자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도를 말한다. 이 시도는 일정 수준의 객관성을 담보할 수 있어야 한다. 인식론의 관점에서 정당화는 실험에 의한 정당화, 증거에 의한 정당화, 그리고 논리에 의한 수학적 증명 등으로 대변할 수 있다(http://www.wikipedia.org). 이때 수학적 증명은 논리적 연역법을 의미한다. 기하 교육에서의 증명은 기하 지식을 증거로 삼으며 논리적 형식을 갖춘 정당화를 의미한다(신이섭 외, 2011).

정당화를 유도하는 교수 방법은 다양한 형태로 나타날 수 있다. 예를 들면 학생들의 이해 수준에 합당한 간단한 논리 증명(연역 추론), 계산에 입각한 문제 해결(계산 증명), 그리고 귀납 추론 등이 포함된다. 정당화 교육을 중심으로 한 기하 교육은 기본적으로 학생의 활동에 의존한다. 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측과 정당화 활동을 강조하여, 증명을 하기 위해 익숙해져야 하는 용어와 기호의 사용이나 형식 논리 규칙의 이용에서 생기는 어려움을 줄이고 학생의 기하 지식에 기초한 추론 활동을 강화하는 것이다.

이와 같이 기하 교육에서 객관적 사실의 확인 과정인 논리 증명을 정당화 수준으로 확대함으로써, 논리 형식만을 다루는 것이 아니라 학생들의 인지 수준과 흥미를 고려한 추론 기회를 폭넓게 제공하려 하였다. 이러한 활동은 기하에 대한 이해와 반성적 사고뿐만 아니라 의사소통 능력의 향상에도 도움이 될 것이다.

한마디로 중학교의 기하 영역에서는 학생 활동이 중심이 되는 학생 주도적 수업을 강조하며 형식적 증명보다는 학생의 이해 수준에 입각한 '정당화' 수준의 교육을 지향하고자 하였다. 또한 2007 개정 교육과정의 단발성 주제와 상대적으로 의미가 적은 용어들을 삭제하고, '원과 직선', '원주각' 두 영역을 원의 성질로 묶어 하나의 영역으로 내용을 축소시켜 다루는 등, 전체적으로 학습량을 경감하였다.

이상으로 중학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 집합 삭제
- 근삿값 삭제
- 십진법과 이진법 삭제
- 수학 개념과 실생활 활용의 통합
- 방정식 관련 용어 약화
- 함수 개념 도입 방법의 변화
- 정의역, 공역, 치역 용어 삭제
- 통계 교수 · 학습 방법의 변화
- 누적도수의 분포 삭제
- 줄기와 잎 그림 추가
- 정당화에 의한 기하 교육 강조
- 작도와 합동, 평면도형의 성질 내용 축소
- 원의 성질 내용 축소

다. 고등학교

(1) 일반 과목

고등학교의 일반 과목에 해당하는 6개 교과목의 주요 변화 내용을 개략적으로 살펴보면 다음과 같다.

■ 수학 I

「수학 I」은 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 가장 기초가 되는 과목이다.

「수학 I」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '수와 연산', '문자와 식', '기하' 영역의 일부를 재구성한 것으로 크게 '다항식', '방정식과 부등식', '도형의 방정식'의 3개 영역으로 구성된다. '다항식' 영역에서는 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해를, '방정식과 부등식' 영역에서는 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식, 여러 가지 부등식을 다룬다.

「수학 I」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교

하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 실수 삭제
- 복소수와 이차방정식의 연계 강화
- 다항식의 약수와 배수 약화
- 이차방정식, 이차부등식, 이차함수의 통합 및 연계성 강화

■ 수학 II

「수학 Ⅱ」는 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」과 「수학 Ⅰ」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 「수학 Ⅰ」과 함께 기초가 되는 과목이다.

「수학 Ⅱ」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '집합과 명제'와 '함수' 영역의 내용, [수학 Ⅰ]의 내용 중 '수열' 영역과 '지수함수와 로그함수'의 내용 중 일부를 재구성한 것으로 크게 '집합과 명제', '함수', '수열', '지수와 로그'의 4개 영역으로 구성된다. '집합과 명제' 영역에서 집합, 명제를, '함수' 영역에서 함수, 유리함수와 무리함수를, '수열' 영역에서 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법을, '지수와 로그' 영역에서 지수, 로그를 다룬다.

「수학 Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 집합 내용 통합
- 명제 내용 보완 및 증명 부분 강화
- 함수 영역의 내용 약화
- 수열의 약화 및 이동
- 지수와 로그 내용 약화 및 이동

■ 확률과 통계

「확률과 통계」는 「수학 Ⅰ」과 「수학 Ⅱ」를 이수한 후 또는 「미적분 Ⅰ」까지 이수한 학생이 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 또는 자연 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「확률과 통계」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 고등학교 [수학]의 '확률과 통계' 영역, 선택 과목인 [미적분과 통계 기본]과 [적분과 통계]의 '확률', '통계' 영역, 그리고 [적분과 통계]의 '순열과 조합' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '순열과 조합', '확률', '통계'의 3개 영역으로 구성된다. '순열과 조합' 영역에서 경우의 수, 순열과 조합, 분할, 이항정리를, '확률' 영역에서 확률의 뜻과 활용, 조건부확률을 '통계' 영역에서 확률분포, 통계적 추정을 다룬다.

「확률과 통계」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 순열과 조합 관련 내용 통합 및 추가
- 연속확률변수의 평균과 표준편차 삭제
- 공학적 도구의 활용 강조

■ 미적분 I

「미적분 Ⅰ」은 「수학 Ⅰ」과 「수학 Ⅱ」를 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「미적분 Ⅰ」은 2007 개정 교육과정에서 [수학 Ⅰ]의 '수열의 극한' 영역과 [미적분과 통계 기본]의 '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법' 영역의 내용을 기본으로 하고 [수학 Ⅱ]의 '미분법' 영역의 내용 중 '롤의 정리, 평균값 정리의 이해와 활용'에 대한 내용을 추가하여 '수열의 극한', '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법'의 4개의 대영역으로 구성된다. '수열의 극한' 영역에서 수열의 극한, 급수를, '함수의 극한과 연속'에서 함수의 극한, 함수의 연속을, '다항함수의 미분법' 영역에서 미분계수, 도함수, 도함수의 활용을, '다항함수의 적분법' 영역에서 부정적분, 정적분, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분 Ⅰ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 수열의 극한의 이동 통합
- 롤의 정리와 평균값 정리의 이동
- 도함수의 활용 영역의 교수 · 학습상의 유의점 보완 및 삭제
- 용어 수정(중간값 정리를 사이값 정리로 수정)

■ 미적분Ⅱ

「미적분Ⅱ」는 「미적분Ⅰ」을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「미적분Ⅱ」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 [수학]의 '함수' 영역, [수학Ⅰ]의 '지수함수와 로그함수' 영역, [수학Ⅱ]의 '삼각함수', '함수의 극한과 연속'과 '미분법' 영역, [적분과 통계]의 '적분법' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '지수함수와 로그함수', '삼각함수', '미분법', '적분법'의 4개 영역으로 구성된다. '지수함수와 로그함수' 영역에서 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프, 지수함수와 로그함수의 미분을, '삼각함수' 영역에서 삼각함수의 뜻과 그래프, 삼각함수의 미분을, '미분법' 영역에서 여러 가지 미분법, 도함수의 활용을, '적분법' 영역에서 여러 가지 적분법, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 지수함수와 로그함수 통합 및 약화
- 삼각함수 통합 및 약화
- 미분법 및 적분법의 내용 조정

■ 기하와 벡터

「기하와 벡터」는 '미분과 적분'을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「기하와 벡터」는 2007 개정 교육과정에서 [수학Ⅱ]의 '미분법' 영역과 [적분과 통계]의 '적분법' 영역, 그리고 [기하와 벡터]의 '이차곡선', 공간도형과 공간좌표', '벡터' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '평면 곡선', '평면벡터', '공간도형과 공간벡터'의 3개 영역으로 구성된다. '평면 곡선' 영역에서 이차곡선, 평면 곡선의 접선을, '평면벡터' 영역에서 벡터의 연산, 평면벡터의 성분과 내적, 평면 운동을, '공간도형과 공간벡터' 영역에서 공간도형, 공간좌표, 공간벡터를 다룬다.

「기하와 벡터」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 미분법을 이용한 평면 곡선의 이해 강화
- 위치벡터를 이용한 평면 운동의 이해 강화

(2) 기본 및 심화 과목

고등학교의 경우에는 일반 과목에 해당하는 6개 교과목 이외에, 기본 과목인 「기초 수학」과 심화 과목인 「고급 수학Ⅰ」, 「고급 수학Ⅱ」가 새로 신설되었다.

「기초 수학」은 중학교 수학의 내용을 잘 이해하지 못한 학생이 일반 과목의 수학 교과를 이수하기 위해 필요한 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다.

「기초 수학」의 내용은 '수와 식의 계산', '방정식과 함수', '피타고라스 정리와 삼각비'로 구성된다. '수와 식의 계산' 영역에서는 수의 연산, 문자의 사용과 식의 계산, 다항식의 계산을, '방정식과 함수' 영역에서는 일차방정식과 일차함수, 이차방정식과 이차함수를, '피타고라스 정리와 삼각비' 영역에서는 피타고라스 정리, 삼각비를 다룬다.

「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」는 심화 과목으로 일반 과목에서 학습한 수학의 기본 지식과 기능을 바탕으로 심화된 수준의 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하고, 수학적 사고력, 창의적 사고력, 문제 해결력 등을 신장시킬 수 있도록 하는 과목이다. 「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」는 심화된 수학적 지식과 사고 방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연과학 및 공학 분야뿐만 아니라 사회과학의 학습에 기초를 제공한다.

「고급 수학Ⅰ」의 내용은 '벡터와 행렬', '일차변환', '그래프'로 구성된다. '벡터와 행렬' 영역에서는 벡터, 행렬과 연립일차방정식을, '일차변환' 영역에서는 일차변환과 행렬, 고윳값과 행렬의 거듭제곱을, '그래프' 영역에서는 그래프의 뜻, 여러 가지 그래프, 그래프의 활용을 다룬다. 「고급 수학Ⅱ」의 내용은 '복소수와 극좌표', '미적분의 활용', '편미분'으로 구성된다. '복소수와 극좌

표' 영역에서는 복소수의 극형식, 극좌표와 극방정식을, '미적분의 활용' 영역에서는 미분의 활용, 미분방정식, 적분의 활용을, '편미분' 영역에서는 이변수함수의 뜻, 극한과 연속, 편미분, 편미분의 활용을 다룬다.

04 내용 체계

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '수학' 교과목(초등학교 1학년～중학교 3학년)의 내용 체계는 다음과 같다.

학교급 / 학년군 / 영역	초등학교		
	1～2학년군	3～4학년군	5～6학년군
수와 연산	• 네 자리 이하의 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈	• 다섯 자리 이상의 수 • 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈 • 나눗셈 • 자연수의 혼합 계산 • 분수 • 소수 • 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈	• 약수와 배수 • 분수의 덧셈과 뺄셈 • 분수의 곱셈과 나눗셈 • 소수의 곱셈과 나눗셈 • 분수와 소수
도형	• 입체도형의 모양 • 평면도형의 모양 • 평면도형과 그 구성 요소	• 도형의 기초 • 평면도형의 이동 • 원의 구성 요소 • 여러 가지 삼각형 • 여러 가지 사각형 • 다각형	• 합동과 대칭 • 직육면체와 정육면체 • 각기둥과 각뿔 • 원기둥과 원뿔 • 입체도형의 공간감각
측정	• 양의 비교 • 시각 읽기 • 시각과 시간 • 길이	• 시간 • 길이 • 들이 • 무게 • 각도 • 어림하기(반올림, 올림, 버림) • 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만)	• 평면도형의 둘레와 넓이 • 무게와 넓이의 여러 가지 단위 • 원주율과 원의 넓이 • 겉넓이와 부피
규칙성	• 규칙 찾기	• 규칙 찾기 • 규칙과 대응	• 비와 비율 • 비례식과 비례배분 • 정비례와 반비례
확률과 통계	• 분류하기 • 표 만들기 • 그래프 그리기	• 자료의 정리 • 막대그래프와 꺾은선그래프	• 가능성과 평균 • 자료의 표현 • 비율그래프(띠그래프, 원그래프)

영역 \ 학교급 / 학년군	중학교		
	1∼3학년군		
수와 연산	• 소인수분해 • 최대공약수, 최소공배수 • 정수와 유리수의 개념, 대소 관계, 사칙계산	• 순환소수 • 유리수와 순환소수의 관계	• 제곱근의 뜻과 성질 • 무리수 • 실수의 대소 관계 • 근호를 포함한 식의 사칙계산
문자와 식	• 문자의 사용 • 식의 값 • 일차식의 덧셈과 뺄셈 • 일차방정식	• 지수법칙 • 다항식의 덧셈과 뺄셈 • 다항식의 곱셈과 곱셈 공식 • 다항식의 나눗셈 • 등식의 변형 • 연립일차방정식 • 부등식의 성질과 일차부등식 • 연립일차부등식	• 인수분해 • 이차방정식
함수	• 함수의 개념 • 순서쌍과 좌표 • 함수의 그래프	• 일차함수의 의미와 그래프 • 일차함수의 활용 • 일차함수와 일차방정식의 관계	• 이차함수의 의미 • 이차함수의 그래프의 성질
확률과 통계	• 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형 • 도수분포표에서의 평균 • 상대도수의 분포	• 경우의 수 • 확률의 뜻과 기본 성질 • 확률의 계산	• 중앙값, 최빈값, 평균 • 분산, 표준편차
기하	• 점, 선, 면, 각 • 점, 직선, 평면 사이의 위치 관계 • 평행선의 성질 • 삼각형의 작도 • 삼각형의 합동조건 • 다각형의 성질 • 부채꼴에서 중심각과 호의 관계 • 부채꼴에서 호의 길이와 넓이 • 다면체, 회전체의 성질 • 입체도형의 겉넓이와 부피	• 이등변삼각형의 성질 • 삼각형의 외심, 내심 • 사각형의 성질 • 닮은 도형의 성질 • 삼각형의 닮음조건 • 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비 • 닮은 도형의 성질 활용	• 피타고라스 정리 • 삼각비 • 원의 현, 접선에 대한 성질 • 원주각의 성질

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '수학' 교과목 이외에 고등학교 선택 교과목의 내용 체계는 다음과 같다.

〈기본 과목〉

■ 기초 수학

영역	내용
수와 식의 계산	• 수의 연산 • 문자의 사용과 식의 계산 • 다항식의 계산
방정식과 함수	• 일차방정식과 일차함수 • 이차방정식과 이차함수
피타고라스 정리와 삼각비	• 피타고라스 정리 • 삼각비

〈일반 과목〉

■ 수학 I

영역	내용
다항식	• 다항식의 연산 • 나머지정리 • 인수분해
방정식과 부등식	• 복소수와 이차방정식 • 이차방정식과 이차함수 • 여러 가지 방정식 • 여러 가지 부등식
도형의 방정식	• 평면좌표 • 직선의 방정식 • 원의 방정식 • 도형의 이동 • 부등식의 영역

■ 수학 II

영역	내용
집합과 명제	• 집합 • 명제
함수	• 함수 • 유리함수와 무리함수
수열	• 등차수열과 등비수열 • 수열의 합 • 수학적 귀납법
지수와 로그	• 지수 • 로그

■ 미적분 I

영역	내용
수열의 극한	• 수열의 극한 • 급수
함수의 극한과 연속	• 함수의 극한 • 함수의 연속
다항함수의 미분법	• 미분계수 • 도함수 • 도함수의 활용
다항함수의 적분법	• 부정적분 • 정적분 • 정적분의 활용

■ 미적분 II

영역	내용
지수함수와 로그함수	• 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 • 지수함수와 로그함수의 미분
삼각함수	• 삼각함수의 뜻과 그래프 • 삼각함수의 미분
미분법	• 여러 가지 미분법 • 도함수의 활용
적분법	• 여러 가지 적분법 • 정적분의 활용

■ 확률과 통계

영역	내용
순열과 조합	• 경우의 수 • 순열과 조합 • 분할 • 이항정리
확률	• 확률의 뜻과 활용 • 조건부확률
통계	• 확률분포 • 통계적 추정

■ 기하와 벡터

영역	내용
평면 곡선	• 이차곡선 • 평면 곡선의 접선
평면벡터	• 벡터의 연산 • 평면벡터의 성분과 내적 • 평면 운동
공간도형과 공간벡터	• 공간도형 • 공간좌표 • 공간 벡터

〈심화 과목〉

■ 고급 수학 I

영역	내용
벡터와 행렬	• 벡터 • 행렬과 연립일차방정식
일차변환	• 일차변환과 행렬 • 고윳값과 행렬의 거듭제곱
그래프	• 그래프의 뜻 • 여러 가지 그래프 • 그래프의 활용

■ 고급 수학 II

영역	내용
복소수와 극좌표	• 복소수의 극형식 • 극좌표와 극방정식
미적분의 활용	• 미분의 활용 • 미분방정식 • 적분의 활용
편미분	• 이변수함수의 뜻 • 극한과 연속 • 편미분 • 편미분의 활용

III. 수학 교과서의 개발 동향

01 구성주의와 수학 교과서

구성주의의 수학 교육관은 '학생에 의한 수학 지식의 자주적 구성'이라는 교육관에 기초한다고 볼 수 있다. 구성주의를 수학 교육의 실제에 적용하고자 하는 사람들은 수학적 지식이 외부의 강화에 의하여 학습자에게 전달될 수 있다는 견해에 동의하지 않는다. 즉, 구성주의자들은 지식이 학습자의 내면 세계에서 적절한 경험을 통해 자주적으로 구성된다고 생각하고 있으며, 이것은 곧 학생들이 수학 지식을 수동적으로 받아들임으로써 획득하는 것이 아니라 각자 능동적으로 재발명해 나감으로써 (수학 지식을) 구성하는 것을 뜻한다. 따라서 구성주의적 입장을 취하는 수학 교육 관계자들은 전통적인 방식의 수학 교육을 개선할 수 있는 하나의 대안으로서 구성주의적 수학 교육을 제안하고 있는 것이다. 특히 사회적 구성주의자들은 이제껏 전통주의자들의 주된 관심사였던 수학 지식의 실제에 대한 인식론적인 논의보다는 수학 지식에 대한 구성주의적 교수-학습의 가능성에 관심을 두었다.

'구성주의'는 그 말 자체가 광범위한 의미를 지니고 있을 뿐만 아니라 '구성'이라는 용어도 모호하기 때문에 이를 해석하는 견해가 다양하다. 그러나 현재 우리나라 수학 교과서에는 교구 및 소프트웨어 등의 조작 활동의 필요성, 개인별 능력 차를 고려한 수준별 교재의 필요성, 의사소통을 고려한 교과서 개발의 필요성 등의 반영이 절실히 요구되고 있다. 이러한 요구 사항은 조작적 구성주의자로 불리는 피아제의 발생적 인식론의 중심 아이디어인 '조작', 급진적 구성주의자들이 지식의 진리 자체에 관한 논의를 거부하고 초미의 관심사로 여긴 '개인 중심적' 구성이나 '생장 원리', 사회적 구성주의자들이 객관성을 사회성으로 대치하면서 도입한 사회적 합의의 수단인 '의사소통'을 교재 구성에 반영하자는 생각과 크게 다르지 않다.

02 구성주의적 수학과 교수-학습 원리의 반영

수학 교수-학습론의 원천으로서의 구성주의에서 수학 교육에 적용할 수 있는 유효한 교수-학습 원리는 다음과 같다.

가. 교과서에 학생 중심적 개별화의 원리 반영

구성주의의 기본적인 주장인 지식의 자주적 구성의 원리는 학생들로 하여금 갈등 국면에 대처하여 동화와 조절의 메커니즘에 따라 반영적 추상화의 과정을 통해 새로운 지식을 조정해 나가는 과정을 보여 주고 있다. 이것은 질문을 중심으로 하는 상호 작용적인 추측 및 논박에 의한 수학 교수-학습의 바탕(모델)이 된다. 구성주의는 지식의 자주적 구성을 그 근본 원리로 하고 있지만, 교수-학습의 차원에서 논의되는 지식은 '주관 독립적'인 의미에서의 객관적 지식이 아니라, 규약과 협정 등의 수단을 통하여 '공통 주관적'인 의미에서의 객관성을 가지게 된다.

따라서 수학 교육학적 구성주의에서 취하고자 하는 관점은 바로 공통 주관적인 의미에서의 객관적 지식은 학생 자신에 의해 자주적으로 구성되어야 한다는 것이며, 이러한 관점은 학생 자신에 의한 지식의 능동적인 재발명을 목표로 하는 오늘날의 수학 교육에서 요구되고 있는 관점과 일치한다고 볼 수 있다. 이를 위해서는 학생 중심적인 개별화 수업이 가능하도록 수학적 과제가 제시되어야 할 것이다. 학생이 스스로 생각하고 해결 전략을 궁리해 낼 수 있는 기회를 부여함으로써 학습자 자신이 다양한 사고를 할 수 있도록 해야 한다는 것이다.

나. 교과서에 질문 중심적 상호 작용의 원리 반영

학교 밖의 사회나 교사들은 지금까지 대체적으로 수학 지식의 가치를 인정하고 수학 교육의 당위성을 이해해 왔을지 모르지만, 아마도 학생들은 그러한 당위성을 이해하지 못하였을 것이고, 결과적으로 수학을 의미 없는 것으로 받아들일 수밖에 없었을 것이다. 그렇다면 유효한 수학 교육이 이루어지기 위해서는 학생들이 배워야 할 수학, 즉 학교 수학이 학생들에게 의미 있는 것이 되어야 함은 물론 수학 교수-학습 활동에 참여하고자 하는 학생들의 적극적 의지가 수반되어야 한다. 결국 이를 교과서에 반영하는 것은 질문 중심의 상호 학습이 일어날 수 있도록 과제를 제시하는 형태가 될 것이다. 구성주의에서는 교사와 학생 및 학생과 학생 사이의 상호 작용을 매우 중요시한다. 즉, 교사가 적절한 질문으로 학생의 응답을 유도해 냄으로써 학생들로 하여금 일련의 추측 및 논박 활동을 통해 수학 지식을 구성할 수 있도록 교수-학습 환경을 설정할 것을 요구하고 있다. 따라서 의미 지향적인 활동 수업이 이루어지도록 교과서가 구성되어야 할 것이다.

다. 교과서에 의미 지향적 활동의 원리 반영

위에서 살펴본 수학 지식의 자주적인 구성이 교수-학습에서의 학생의 의미 지향적 활동이나 교사의 적절한 질문만으로 가능한 것은 아니다. 학생에 의한 지식의 자주적 구성은 지식 구성을 하는 학습자 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 자주적 활동 없이는 불가능하다. 다시 말해 효율적인 수학 교수-학습을 위해서는 학습자의 내면화된 자주적 활동이 학생의 교수-학습 활동에의 참여 의지 및 교사의 적절한 질문과 더불어 반드시 필요하다.

이때 이 내면화된 자주적 활동의 메커니즘을 구성주의가 설명해 주고 있는바, 이것이 바로 반영적 추상화이다. 그렇다면 학습자가 반영적 추상화의 과정을 경험할 수 있도록 교재가 구성되어야 함은 물론이다. 부연 설명하면, 교과서는 여러 가지 활동을 통하여 익힌 의미 있는 경험을 반성하여 자기 자신의 지식을 구성할 수 있도록 구현되어야 한다는 것이다.

03 구성주의적 관점에서의 교과서 개발 방향

위에서 살펴본 구성주의적 관점에 기초한 바람직한 수학 교과서를 구현하기 위하여 고려되어야 할 사항은 다음과 같다.

가. 교과서 저자의 철학

교과서에는 교과서 저자 나름대로의 철학이 배어 있어야 한다. 지금까지의 교과서에 제시된 교육과정상의 내용들은 누구나 합의할 수 있는 객관적이고 보편적인 것만을 다루도록 하는 것이 불문율이었다. 그러나 이제는 절대적 진리처럼 내용이 전개되던 교과서의 역할과 권위보다 학생들의 주체적인 사고의 참여를 촉발시킬 수 있는 ‘저자’의 역할과 권위를 우위에 두어야 할 것이다. 이때 교과서 저자는 자신이 왜 그러한 주제에 관심을 가지는지, 그것이 왜 중요한 것인지를 드러내고 어떻게 그 주제를 전개해 나아가는지 등에 관한 자신의 철학과 견해를 피력하고, 또 다른 견해들과의 차이를 드러내어 맥락화시킬 수 있도록 한다.

나. 안내형 교과서

전통주의적 입장에서의 교과서 방식은 학습 목표에서 추출된 세부적 요소들을 논리 정연하게 제시하는 ‘제시형 교과서’라고 할 수 있으며, 구성주의적 관점에서 보는 교과서는 교과서에 제시된 내용들에 학습자와의 실질적인 상호 작용을 통해서 그 의미가 발현될 수 있도록 소재적 가치를 부여하는 ‘안내형 교과서’라고 할 수 있다. 즉, 안내형 교과서는 학습하기를 기대하는 내용들을 직접 제시하는 대신 학습자로 하여금 구조적 변화를 경험하도록 안내하는 역할을 하는 내용으로 교과서를 구성하는 방식

을 취한다고 할 수 있다. 안내형 교과서는 개인적인 관심, 해석, 활동 등 학습자의 주체적인 역할에 큰 비중을 두고 학습자의 적극적이고 당사자적인 관여를 요청하고 있다.

이홍우(1997)는 “교과를 가르치되 학생의 경험과 의미 있게 관련되도록 가르쳐야 한다.”라고 주장하면서 학생들은 자신이 배우는 다른 내용들을 쉽게 이해하고 기억할 수 있을 뿐만 아니라 학교에서 배운 것을 다른 상황에 쉽게 적용할 수 있어야 한다고 하였다. 그러기 위해서는 날로 팽창하는 지식을 모두 가르치려고 할 것이 아니라, 그중에서 기본 또는 핵심이 되는 것만을 골라 가르쳐야 하며, 이와 같이 기본이나 핵심이 되는 것을 ‘지식의 구조’라고 명명하였다. 즉, 지식의 구조를 알면 팽창하는 모든 지식을 하나씩 따로따로 배우지 않더라도 그 기본적인 것에 비추어서 나머지를 쉽게 이해할 수 있다고 본 것이다.

다. 관계적 이해를 도모하는 교과서

기존의 교과서는 지극히 제한된 지면에 방대한 내용을 소개해야 하기 때문에 가능한 한 핵심적이고 확실한 원리나 개념들을 중심으로 간결하고 함축적인 방식으로 제시하고 있다. 이와 같이 주요 주제나 개념들을 피상적으로 제시하는 방식은 교사와 학생들로 하여금 ‘관계적 이해’를 도모하기보다는 수학적 언어와 기호를 이용하여 외우고 재생해 내는 데 급급하게 하는 ‘도구적 지식’을 가지도록 한다.

도구적 수학은 보통 이해하기가 더 쉬우며, 보다 적은 지식이 필요하기 때문에 학습 결과에 대한 보상이 즉각적이고 명백하다. 그러나 이 방식은 수학의 전체 영역에 서로 연결되는 기초적인 개념을 교수-학습하기보다는 서로 분리하여 각각의 주제를 교수-학습하는 것이기 때문에 기대하는 학습이 이루어진다고 보기 어려울 것이다.

반면 관계적 이해를 통한 학습은 마치 나무가 영양분을 찾아서 뿌리를 뻗어 나가거나 동물이 먹이를 찾아 새로운 지역을 탐험하는 것과 같이 능동적으로 새로운 자료를 찾고 새로운 분야를 탐구하는 것에 비유될 수 있다. 그러므로 관계적 이해를 촉구하기 위해서는, 즉 핵심적인 원리나 개념을 습득하게 하기 위해서는 그러한 내용을 얻을 수 있도록 해당 절차를 안내(유도)하는 방식으로 교과서를 구성하도록 한다.

라. 질문 중심의 개념 전개

기존의 교과서는 수학적 지식을 대부분 완성된 형태로 제시하는 하향식 전개 방식을 택하고 있다. 또한 단원의 마무리 단계는 기본 문제, 연습 문제, 종합 문제, 심화 문제 등으로 구성되어 있다. 따라서 계산이나 풀이 형식의 정착을 위해 학생들이 풀어야 할 문제들이 교과서에 산적해 있다. 이런 상황에서 학생들은 문제 풀이를 위한 반복 훈련을 하는 데 주력하게 되고, 교사 역시 이러한 기능을 정착시키기 위한 내용 전개로 수업을 이끌어 가는 경향이 있다.

이를 개선하기 위해서는 현재 교과서에 수록되어 있는 반복 연습형의 문제들을 줄이고 그 대신 수학적 개념과 문제 해결의 절차를 이해시키는 데 주력함으로써, 학생들에게 ‘수학을 한다.’는 것이 이미 배운 개념이나 공식, 절차를 바로 적용해서 연습 문제를 푸는 것이 전부가 아니라는 사실을 인식시켜야 할 것이다.

마. 수학적 유용성 강조

수학은 실제로 모든 학문의 기초로서 우리의 일상생활뿐만 아니라 공학, 의학, 경제, 사회, 문화 등 여타 분야에 지대한 영향을 미치고 있음에도 불구하고 이에 대한 인식이 부족하다. 지금까지의 교과서의 내용 및 그 전개 방식을 살펴보면 교사나 학습자로 하여금 여러 단원의 내용들이 서로 독립된 것이라고 오판하기 쉽게 되어 있다. 따라서 앞으로의 교수-학습 자료에는 단원 간의 내용 연계성을 강조함으로써 학생들 각자의 스키마를 구성하는 데 도움이 되도록 해야 할 것이다. 특히 교과서에

수학의 활용성에 대한 구체적인 내용을 단원별로 또는 전체적으로 기술하고, 과학이나 미술 등 다른 교과목과의 연결성을 찾는 내용도 포함시켜 학생들이 수학의 중요성을 알도록 해야 할 것이다.

바. 다양한 교구 및 도구 활용

수학 수업에서의 교구 사용은 추상적인 수학적 개념을 구체물로 모델링한다는 데 가장 큰 의의가 있으며 이를 통해서 학생들은 수학적 절차나 공식보다는 그 이면에 내재되어 있는 의미를 알 수 있게 된다. 또 교구는 학생들이 직접 만지면서 다루기 때문에 학생 중심적인 개별화 수업을 가능하게 할 뿐만 아니라 2~4명의 소집단 학습을 통하여 집단별 그리고 전체 토론이 이루어짐으로써 반영적 추상화를 경험할 수 있게 한다. 우리나라의 수학 교육과정은 컴퓨터와 계산기의 사용을 교사나 학교의 재량에 따라 사용하도록 권장하고 있다. 하지만 실제 학교 현장에서는 이들을 수업에 언제, 어떻게 활용해야 하는지를 잘 모르고 있는 실정이다. 그러므로 교수-학습 자료에 컴퓨터나 계산기 등의 활용 지침 및 방안에 대한 자세한 설명이 수록되어야 할 것이다.

04 수준별 수업의 운영

가. 수준별 수업의 운영 방식

수학과의 경우 수준별 수업은 1996년부터 현장에서 서서히 실시되기 시작하여 제7차 단계형 수준별 교육과정의 취지에 따라 더욱 활성화되었다. 수준별 수업과 예전의 단계형 수준별 교육과정의 운영은 그 접근 방법이 다르다고 할 수 있겠으나, 학생의 수준에 적합한 교육 내용을 다루고자 하는 점에서 기본 취지는 동일한 것으로 볼 수 있다.

2009 개정 교육과정에 따른 교과서는 기본 과정과 심화 과정의 학습 내용이 명료히 구분되어 제시되어 있지 않지만, 수준별로 개념 설명의 접근 방법을 차별화하고 해당 문제들의 난이도를 조정한다면 분단 수업이나 이동 수업을 진행하기가 용이할 것이다. 이렇듯 수준별 수업은 전통적으로 해 왔던 일제 수업의 폐단을 줄이고, 교사들의 다양한 교수-학습 자료 개발을 활성화시키며 학습자 주도의 학습의 중요성을 인식시키는 등 현장 교육을 긍정적으로 이끌 것이다.

이렇듯 수준별 수업은 학생의 성취 수준에 따라 수준별로 반을 편성하여 동일한 학습 진도 내에서 학습 심도를 달리하여 지도하는 '동진도-이심도' 방식을 취하는 것이 바람직하다. 이에 따라 수준별로 적합한 수업을 진행하기 위해서는 기본적으로 교육과정에 제시된 기본 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 각 수준별로 다루어야 할 학습 내용의 정도와 방법을 차별화하도록 한다. 〈표 Ⅲ-1〉 참조 이때 한 차시의 수업 내용을 기준으로 하거나 또는 교과서의 한 소단원을 기준으로 하여도 무방하다.

〈표 Ⅲ-1〉 수준별 수업 운영 방식

반 수준	수준별 수업 과정		
상	내용 수준	기본 내용	심화 내용
	수업 방식	개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결	발전 과제 해결
중	내용 수준	기본 내용	심화 내용
	수업 방식	개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결	단순 과제 해결
하	내용 수준	기본 내용	
	수업 방식	선수 학습 내용의 이해 → 개념 이해 → 단순 과제 해결	

나. 수준별 수업의 효율적 운영 방안

수준별 수업을 효율적으로 운영하기 위해서는 다음 사항에 유의해야 할 것이다.

(1) 학습자의 눈높이

개인차에 따른 학습 능력을 고려하여 수준별로 분단이나 학급을 편성하여 적절히 운영하여야 한다. 즉, 수준별 수업 운영을 위한 노력으로 우선 각 수준에 따라 수업 내용, 수업 진도 등이 적절한지 검토하여야 한다. 이때 무엇보다도 중요한 것은 수준별 수업을 위한 수업 내용, 수업 진도 등이 교사 또는 수학 교육 관련 전문가의 눈높이가 아닌 '학습자'의 눈높이에 맞춰져야 한다는 점이다.

(2) 내용의 차별화

수준별 개념에 입각한 교수-학습의 차별화는 수준에 따른 '학습 내용의 차별화'를 의미하는 것으로, '학습 내용의 차별화'란 각 수준별로 다루는 학습 내용 그 자체의 차별화를 말하는 것이다. 그런데 2009 개정 교육과정에는 학생들의 수준에 상관없이 모든 학생들이 공통으로 다루어야 하는 내용이 명시되어 있다. 그러므로 '학습 내용의 차별화'란 현행 교육과정에 기초한 공통 필수 격의 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 수준별로 중점을 두어 다루어야 할 '주요 내용'을 차별화하는 것으로 이해할 수 있다. 따라서 '문항의 난이도'뿐만 아니라 각 수준에 적합한 '내용의 차별화'에 기초를 둔 수준별 학습 자료가 개발되어야 할 것이다.

(3) 귀납적 학습법

수학 수업을 전개해 나가는 데 있어서 일반적으로는 개념 및 원리를 설명하고 이에 따른 예제를 푼 뒤 반복 연습 문제를 푸는 '연역적 방식'을 취하고 있다. 그러나 경우에 따라서는 예 또는 예제들을 통하여 그에 부합되는 학습 내용들을 체계적으로 정리하는 '귀납적 방식'을 취함으로써 학습의 이해를 보다 높일 수도 있다. 특히 학습 결손이 명백히 드러난 학생들에게 지극히 한정된 몇몇 문제의 풀이로 학습 내용을 이해시키기는 어렵다. 그러므로 각 수준별로 구체적인 예 또는 예제를 통하여 그에 부합되는 학습 내용(개념, 원리, 법칙 등)을 정리해 나가는 귀납적 방식의 수업도 병행해야 할 것이다.

(4) 소집단별 수행 과제 활동

수준별 능력에 따른 과제(open-response tasks)를 제시하여 학생들이 과제를 수행하면서 어떤 수학적 지식을 사용하고 또 어떻게 접근해 나가야 하는지 등에 관하여 스스로 탐색해 볼 수 있도록 해야 한다. 그러므로 45분의 수업 시간에 모든 활동이 이루어져야 한다는 제한된 시각에서 벗어나 수업 이외의 시간을 활용하여 좀 더 발전 지향적인 장 · 단기 과제를 다루는 것이 바람직할 것이다. 특히 소집단별 수행 과제 활동은 본인이 속한 집단의 구성원들과 그 결과를 기록하여 발표할 수 있는 '의사소통' 능력의 발휘가 가능하므로, 이를 통하여 다양한 자료를 수집, 표현, 분석, 해석함으로써 과제를 성공적으로 수행할 수 있도록 해야 할 것이다.

IV. 수학적 문제 해결

01 문제 해결의 의미

20세기 초에 이루어진 문제 해결에 대한 논의는 1960년대의 '새수학' 운동과 1970년대의 '기본으로 돌아가기' 운동과 같은 과정을 거치면서 크게 부각되지는 못하다가, 1980년대에 들어 기초 기능으로서의 문제 해결력에 대한 관심이 높아지기 시작하면서 부흥기를 맞게 된다. 미국의 수학교사협의회인 NCTM(1980)이 'An Agenda for Action'에서 문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 함을 선언한 이래 1980년대는 문제 해결의 시대라고 할 만큼 이에 대한 다양하고 활발한 논의가 이루어졌다(황혜정 외, 2012, 재인용).

이 같은 문제 해결의 조류는 우리나라의 수학 교육과정에도 서서히 등장하였다. 제 3 차 교육과정에서 급격하게 도입되었던 수학 교육 현대화의 내용은 제 4 차 교육과정에서 경감되고 정선되면서 지나치게 어려운 내용보다는 수학의 기초적 기능을 배양하고 문제 해결력을 신장시키는 데 관심을 가지게 되었다. 이어 제 5 차 수학과 교육과정에서도 수학 내용을 정선하면서 문제 해결력의 신장을 강조하였으며, 제 6 차와 제 7 차 교육과정에서는 문제 해결력의 신장을 위한 지도 내용, 전략, 방법 등을 구체적으로 제시하여 문제 해결력의 지도가 보다 적극성을 띠게 되었다.

또한 2007 개정 교육과정에 이어, 2009 개정 교육과정 문서의 모든 교과목의 '교수-학습 방법' 부분에도 문제 해결에 관한 다음과 같은 내용이 명시되어 있다(교육과학기술부, 2011).

수학적 문제 해결력을 신장시키기 위하여 교수-학습에서 다음 사항에 유의한다.

(1) 문제 해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
(2) 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
(3) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 문제 해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
(4) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

02 문제의 의미와 유형

가. 문제의 의미

문제 해결에서의 '문제'는 해결의 절차가 이미 알려져 있어서 단순히 계산 연습의 대상이 되는 문제보다는, 구체적이고 확실한 해결 방법을 쉽게 구하기 어렵고 문제 해결 과정에서 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 문제를 말한다. 예를 들어 문제 해결이라고 하면 이차방정식의 근의 공식을 배운 후에 근의 공식을 적용하여 주어진 이차방정식의 해를 구하는 것과 같이 배운 내용을 단순하게 적용하여 해를 구하는 연습 문제를 떠올릴지도 모른다. 그러나 최근 수학 교육에서 중요시되는 문제 해결은 이미 배운 수학적 사실이나 알고리즘을 단순히 적용하는 수준의 것이 아니다. 진정한 문제는 목표는 분명하지만 그 목표에 이르는 길이 즉각적으로 주어져 있지 않은 것이다. 문제의 해결에 이르는 알고리즘이나 풀이 방법이 이미 주어져 있거나 알려져 있다면 그 문제는 진정한 의미의 문제라고 보기 어렵다.

나. 문제의 유형

문제의 유형을 분류하는 데에는 여러 가지 견해가 있지만, 가장 보편적인 방법 중의 하나는 ‘정형 문제’와 ‘비정형 문제’로 구분하는 것이다.

■ 정형 문제(routine problems)

이미 제시된 알고리즘을 사용한다. 예를 들어 공식에 나오는 변수에 특정한 수를 대입하여 해결할 수 있는 문제나 전형적인 예제의 풀이 방법을 그대로 적용하여 해결할 수 있는 문제가 해당된다.

■ 비정형 문제(non-routine problems)

문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르는 상태에서 문제 해결 전략이나 독자적인 해결 방법을 고안하여 풀어야 하는 문제를 말한다.

03 문제 해결 과정

폴리아(Pólya, 1957)는 수학적 문제 해결의 과정을 다음과 같이 4단계로 구분하여 제시하고 있다.

문제 이해 → 계획 작성 → 계획 실행 → 반성

다음 표는 문제 해결의 각 단계에서 교사가 사용할 수 있는 적절한 질문과 권고의 예이다.

〈표 Ⅳ-1〉 문제 해결 단계별 질문의 예

문제 해결 과정		해당 질문
문제 이해	문제를 이해하는 단계로, 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고 용어의 뜻을 파악하며 문제를 분석하는 단계이다.	• 미지인 것, 주어진 것은 무엇인가? • 자료는 무엇인가? • 조건은 무엇인가? • 그림을 그려 보고, 적절한 기호를 붙여라.
계획 작성	문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 여러 가지 문제 해결 전략을 이용하게 된다. 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때에는 보조 문제를 고려해야 한다.	• 전에 그 문제를 본 적이 있는가? • 친숙한 문제 중에서 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라. • 유사한 문제는? • 문제를 푸는 데 필요한 조건을 모두 사용했는가?
계획 실행	해결 계획에 따라 실행하는 단계이다.	• 풀이의 각 단계를 조심스럽게 실행하도록 하라. • 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? • 각 단계가 옳다는 것을 설명할 수 있는가?
반성	문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지 알아본 뒤, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 비교해 본다.	• 결과를 점검할 수 있는가? • 풀이 과정을 점검할 수 있는가? • 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? • 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수 있는가?

한편 문제 해결 전략이란 문제 해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견의 실마리를 얻도록 하는 방법 등의 사고 전략을 뜻한다. 크룰릭과 루드닉(Krulick, Rudnick, 1984)은 문제 해결 전략으로 패턴 찾기, 거꾸로 풀기, 추측과 검증, 모의실험, 환원, 목록 작성, 논리적 연역, 자료 정리(그래프, 방정식, 대수식, 표, 차트, 도식)를 제시하였으며, 그리노(Greeno, 1978)는 어림산, 단순화하기, 실험하기, 그림 그리기, 표 만들기, 그래프 그리기, 방정식 세우기, 규칙성 찾기, 순서도 구성, 판단 공간(decision-space)의 분할, 연역 논리로 문제 해결 전략을 구분하였다.

04 문제 해결의 예

다음에 주어진 문제를 폴리아(Pólya, 1957)의 문제 해결 4단계를 따라 풀어 보면 다음과 같다.

> ㉮ 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라고 하면, 가로의 길이는 얼마인가?

① 문제의 이해

문제에서 구하려는 것은 가로의 길이이며, 문제에서 주어진 것은 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라는 사실이다.

② 계획 세우기

직사각형의 세로의 길이를 x라고 하면, 가로의 길이는 $2.5x$가 된다. 직사각형의 둘레의 길이는 네 변의 길이의 합과 같으므로 $x+2.5x+x+2.5x=35$

③ 계획의 실행

방정식을 풀면 $7x=35$, 즉 $x=5$이므로 가로의 길이는 $2.5\times5=12.5$(cm)이다.

④ 풀이의 반성

풀이 과정을 검토하여 잘못된 곳은 없는지 확인한다. 또 다른 방법으로도 문제를 해결할 수 있는지 조사한다. 이 문제의 경우 다음과 같이 풀 수도 있다.

가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배이므로

$$(\text{가로의 길이}):(\text{세로의 길이})=2.5:1=5:2$$

이고, 둘레의 길이가 35 cm이므로

$$(\text{가로의 길이})+(\text{세로의 길이})=\frac{35}{2}=17.5$$

따라서 가로의 길이는 $17.5\times\frac{5}{7}=12.5$(cm)이다.

㉮와 유사한 문제를 다음과 같이 만들어 풀어 본다.

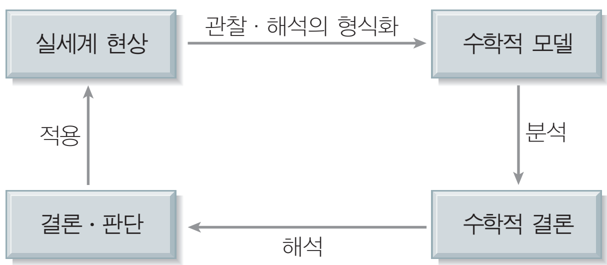
> 둘레의 길이가 35 cm인 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 3 cm 더 길 때, 가로의 길이를 구하여라.

05 문제 해결 과정과 수학적 모델링

가. 문제 해결 과정과 수학적 모델링

수학적 모델링은 문제 해결의 특징을 지니지만, 비수학적 문제 상황에서 출발하는 것을 기본으로 한다는 점에서 문제 해결과 차별화된다(NCTM, 1991). 즉, 수학적 모델링은 비수학적 대상에서 수학적 표상을 찾는 것으로, 대상이나 체계 또는 과정의 중요한 특징을 이루는 수학적 구조나 이론을 세우는 것을 말하며, 어떤 현상에 관한 문제를 해결하기 위하여 원래의 문제 상황을 수학적으로 표현하는 수학화의 과정을 중시한다. 특히 한 체계에서의 개념이나 문제 상황을 다른 체계로 번안하여 내면화하거나 해결해 가는 과정은 모델링 과정의 전이가 쉽게 일어나도록 할 수 있음을 의미한다. 또한 수학적 모델링은 수학과 다른 과목 또는 일상생활과의 연결성을 강조한다. 이것은 수학 학습의 초점이 완결된 지식의 획득이 아니라 지속적인 모델의 구안과 수정을 통한 본 개념의 이해에 맞추어져야 함을 의미한다.

일상생활에서의 경험이 모델링 과정을 통해 수학적으로 재조직될수록 한 체계에서 다른 체계로 쉽게 전이되어 요소들 사이의 관계 구조의 파악이 용이하고, 이를 바탕으로 실세계에서 제기된 문제를 해결할 수 있다. 수학적으로 의미 있는 모델을 구성하는 모델링 과정은 4단계의 순환 과정으로 구성되며, 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-1] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

NCTM(1991)의 '*Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*'에서는 수학적 모델링 과정을 다음과 같이 설명하고 있다.

① 현상을 관찰하여 그 현상에 내재되어 있는 문제 상황을 명료히 밝히고, 문제에 중요한 영향을 미치는 요인들을 찾는다.
② 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축한다.
③ 적절한 수학적 분석을 구축한 모델에 적용한다.
④ 결과를 얻어 내고 그 결과를 현상에 맞도록 재해석하여 결론을 도출한다.

요약하면 수학적 모델링은 실세계의 여러 현상을 수학적인 수단에 의해 정리하고 조직하는 활동으로, 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 수학적 표현으로 변환하면서 현상에 내재된 수학적 개념을 파악, 문제를 해결하여 실세계의 문제 상황에 적용할 수 있도록 하는 활동 과정이다. 이러한 수학적 모델링을 통한 수학 학습은 새로운 수학적 개념을 도입하거나 이미 개발된 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하는 데 유용하여, 중요한 수학적 아이디어와 문제 해결 과정에 강력한 수단이 된다. 따라서 수학적 모델링을 통하여 수학 교육에서 다음과 같은 목적을 달성할 수 있다(Niss, 1989).

- 새로운 수학적 개념과 방법을 이해한다.
- 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.
- 창의적 사고와 문제 해결 태도, 활동, 능력을 기른다.
- 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하는 태도를 기른다.
- 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어지고 있는 것임을 이해한다.

나. 수학적 모델링의 예

연못에 있는 물고기의 수를 조사하는 다음 상황을 통해 수학적 모델링을 살펴보자.

(1) 문제 상황

이 게임의 목적은 연못에 있는 물고기의 수를 알아내는 것이다. 이러한 정보는 연못을 관리하고 물고기에 대해 파악하는 데 도움을 줄 것이다. 연못에 있는 물고기의 수를 어떻게 추측할 수 있겠는가?

(2) 필요한 수학 개념

비와 비율

(3) 모델

우리는 연못에 있는 물고기의 수를 알 수 없으므로, 물고기의 수를 n마리라고 하자.

우선 몇 마리의 물고기를 잡아 물고기가 다치지 않게 꼬리에 표를 달고, 다시 그 물고기들을 연못에 놓아준다고 가정하자. n마리 중에서 p마리를 잡아 표시를 하고, 며칠 후에 q마리의 물고기를 잡는다면 그중에는 꼬리표를 단 것도 있고 달지 않은 것도 있을 것이다. 이때 꼬리표를 단 물고기의 수를 x라고 하면, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{p}{n}=\frac{x}{q}$$

p, x, q 모두 측정값이므로, n의 값을 구할 수 있다.

다음은 앞과 같은 활동을 10번 시행한 예이다.

표본 채취 순서	꼬리표를 단 물고기의 수	표본 수
1	3	15
2	0	15
3	3	15
4	1	15
5	2	15
6	4	15
7	6	15
8	2	15
9	4	15
10	2	15

이때 좀 더 정확한 n의 값을 구하기 위해서는, x의 평균 $\overline{x}$를 구하여 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$$n=\frac{pq}{\overline{x}}$$

예를 들어 처음에 표시한 물고기의 수(p)가 10마리이고 다섯 번 표본을 채취했다면, $\overline{x}=1.8$, $p=10$, $q=15$이므로 $n=83$이다.

위와 같이 연못에 있는 물고기의 수를 측정하는 이러한 과정을 'the capture/recapture' 방법이라고 하며, 이것은 게임으로도 사용되고 보존청에서도 활용되고 있다.

V. 수학과 평가의 특징 및 방법

01 수학과 평가의 동향

1990년대 초 미국 NCTM의 대안적 평가의 강조를 기점으로, 우리나라에서도 1995년 교육개혁위원회 주체의 '세계화 · 정보화 시대를 주도하는 신교육체제 수립을 위한 교육개혁방안' 수립, 1997년 서울시교육청의 초등학교 새물결 운동, 1997년 제7차 교육과정 개정 등의 영향으로 학교 현장에 수행 평가가 점차 반영되기 시작하였다. 결과적으로 우리나라에서도 전통적인 평가 방식의 변화 및 개선의 필요성이 인식되면서 새로운 평가 방법의 도입이 요청되고 이를 위한 대안으로 학교 현장에의 수행 평가 도입 및 활성화 방안이 추진되었으며, 이는 현재까지 지속적으로 강조되고 있다.

이에 대한 실례로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 모든 교과목에서의 평가 부분은 다음과 같이 진술되어 있다(교육과학기술부, 2011).

가. 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하고, 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다.

나. 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 단계를 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.

다. 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등을 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

라. 수학 학습의 평가에서는 선택형 위주의 평가를 지양하고 서술형 평가, 관찰, 면담, 자기 평가 등의 다양한 평가 방법을 활용하여 수학 학습에 대한 종합적인 평가가 이루어질 수 있게 한다.

마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수-학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력
(2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력
(3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력
(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력
(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력
(6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력
(7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력

바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 수학 및 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치 인식 등의 정도를 파악한다.

사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

이상의 내용을 중심으로 우리나라 수학과의 평가 동향을 간략히 살펴보면, 우선 평가를 통하여 학생에 대한 등급을 매기기보다는 학생과 교사에게 도움을 주는 것이 강조되어 있으며, 최종 결과의 평가보다는 과정에 대한 평가를 강조하고 있다. 또한 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가 등을 권장하고 있다. 특히 최근 들어 인지적 영역에 대한 평가뿐만 아니라 정의적 영역에 대한 평가도 점차 강조되고 있다. 아울러 평가 상황에서도 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구 및 교구의 적절한 이용을 권장하고 있음을 알 수 있다.

02 수학과 평가의 원리

학교 수학에서의 평가는 주로 교수-학습 방법의 개선을 위하여 이루어져야 하는데, 그동안 평가는 수준 판정 및 선발의 목적을 달성하는 데 치중해 왔다. 이로 인해 평가는 학생들에게 도움을 주기보다 많은 심적인 부담을 안겨 주었으며, 그러한 평가 결과는 교사의 수업 방법을 반성하고 개선하는 데 그다지 활발히 활용되지 못하였다. 또 지식을 측정하는 지필 검사가 전적으로 활용되고, 창의력, 탐구력과 같은 고등 정신 능력과 흥미, 관심, 열의와 같은 정의적 능력을 평가할 수 있는 다양한 평가 방법이 활용되지 못하였다. 이렇듯 잘못된 평가 방식은 교육 본연의 모습을 그르칠 수도 있지만, 반대로 올바른 평가 방식은 교육 본연의 모습을 찾는 데 절대적인 영향을 미친다. 이에 따라 수학 교과에서 점차 지향되고 있는 평가의 동향이나 특징에서 알 수 있는 바와 같이, 수학과 평가가 바르게 이루어지기 위해서는 다음과 같은 기본 원리가 지켜져야 한다(황혜정 외, 1997).

가. 발달적 교육관을 중시하는 평가

평가는 그 방향과 방법에 영향을 주는 기준하에서 선발적 교육관과 발달적 교육관으로 대별할 수 있는데, 발달적 교육관에서의 교육 평가는 학생의 선발이나 개인차를 내는 데 관심이 있는 것이 아니라, 모든 학생이 가능한 한 의도하는 바의 수업 목표를 달성할 수 있도록 모든 학습자에게 적절한 학습 방법을 배치하기 위한 평가를 하게 된다. 또한 학생 간의 서열과 개인차를 내기 위한 평가 방법보다는 주어진 수업 목표를 어느 정도 달성하였는가 하는 수업 목표 달성도의 평가에 그 관심이 집중된다.

발달적 교육관은 준거지향평가의 관점으로 귀결된다고 할 수 있다. 평가의 목적에 따라서 상대평가를 하여야 할 때가 있고, 준거지향평가를 하여야 할 때도 있다. 그러나 수학과 평가가 수학적 능력을 신장시킨다는 목적을 달성하기 위해서는 교사가 선발적 교육관보다는 발달적 교육관을 지녀야 한다. 그럼으로써 교사는 교육 목표의 달성도와 학생의 학습 과정에 더욱 관심을 기울이고 자신의 수업 방법과 평가 방법에 대해 보다 반성하며 학생 개개인에 적합한 교수-학습 방법을 적용할 수 있다.

나. 다양한 평가 방법을 수반하는 평가

그동안 수학 교과에서 다양한 평가 방법이 사용되지 못한 주된 이유는 교사에게 주는 부담, 그리고 다양한 평가 방법을 활용할 수 있는 다양한 형태의 수업을 하는 데 교사가 익숙하지 못하기 때문이다. 또 수학에서는 지필 검사만으로도 학생들의 수학적 능력을 충분히 평가할 수 있다는 잘못된 인식 때문일 수도 있다. 그러나 지필 검사만으로는 다양한 상황에서 다양하게 표현되는 수학적 능력을 종합적으로 바르게 평가할 수 없다. 수학이 타 교과목과는 다른 특성을 지니고 있다고 하더라도, 수학적 능력 역시 다양한 평가 방식을 통해서 바르게 평가될 수 있다. 이제까지의 일상적인 수업 방법을 탈피하여 학생들의 수학적 사고를 자극하는 새로운 수업 방법을 적용하여 보고, 또 이에 부합하는 새로운 방법으로 평가를 해야 할 것이다.

다. 문제 해결 과정을 중시하는 평가

현재의 수학과 평가에서는 정 · 오답 여부, 점수, 석차 등이 중요시되고 있으며, '학생이 어떠한 사고 과정을 거쳐서 이 문제를 해결하였는가?', '학생이 사고 과정에서 어떤 오류를 범해서 문제를 풀지 못하였는가?'는 중요시되지 않는다. 이는 다인수 학급에서의 평가의 효율성, 선발적 교육관, 상대적 평가관이 중요시되는 분위기 때문이다. 그러나 이러한 평가 방식이 계속 적용되면 학생은 사고 과정, 문제 해결 과정의 타당성보다 정 · 오답 여부에만 신경을 쓰기 때문에 학생의 수학적 사고 능력, 문제 해결력은 향상되지 못한다. 또 교사는 학생 개개인이 지닌 사고 과정의 결함을 알 수 없기 때문에 그러한 결함들이 발견되어도 치유되기 어렵다. 교사 역시 자신의 교육 방법을 반성해 가면서 학생을 지도할 기회를 가지기

어렵다. 그러므로 이러한 일을 가능하게 하려면 다양한 풀이 과정과 방법이 공유되는 해결(또는 수행) 과정을 중요시하는 평가가 이루어져야 할 것이다.

라. 정의적 영역의 능력을 중시하는 평가

정의적 영역의 평가는 수학적 지식 및 기능에 관한 인지적 영역의 평가 못지않게 중요하다. 학생이 가지는 수학적 성향은 그가 수학에 계속적으로 관심을 가지고 공부를 하며, 높은 성취를 이룰 수 있을 것인지를 판단하는 중요한 준거가 된다. 최근 들어 우리나라에서도 정의적 영역에 대한 평가의 중요성이 점차 인식되고 있다. 이는 우리나라 학생들이 국제 학업성취도 비교 평가에서 수학 학업성취 수준은 세계 최상위권임에도 불구하고, 정의적 수준은 최하위권인 것으로 나타났기 때문이다. 많은 학생들이 수학은 재미없고 어려운 과목, 일상생활에 도움이 안 되는 과목, 대학 입시를 위한 과목 등 매우 부정적인 교과로 인식하고 있는 것으로 나타났다. 이는 우리 사회에 큰 우려감을 주고 있으며, 이에 대한 개선책이 요구되고 있다(박선화 외, 2010).

그럼에도 불구하고 우리의 현실에서 정의적 영역에서의 평가가 제대로 이루어지고 있지 않은 이유는 평가에서의 주관성과 교사의 주관적 판단을 중요하게 여기지 않고 신뢰하지 못하는 분위기, 평가상의 번거로움, 교사들이 쉽게 이용할 수 있는 평가 도구나 자료의 부족 때문이다. 이에 따라 교사의 주관적 판단의 중요성을 인식하고 그것을 신뢰하며, 평가상의 번거로움을 최소화하고, 교사들이 손쉽게 이용할 수 있는 관찰 또는 면담지 등의 평가 도구가 개발되고 제공된다면, 정의적 영역에 대한 평가도 보다 활성화될 수 있을 것이다.

여기서 수학에 대한 정의적 특성의 의미와 구성 요소를 간단히 살펴보면 다음과 같다. 한국교육과정평가원(박선화 외, 2010)에서는 수학에 대한 정의적 특성을 수학에 대한 경험으로 인하여 형성된 정서, 신념, 동기 등을 포함하는 심리적 특성으로 정의하여 제시하였다.

〈표 Ⅴ-1〉 수학에 대한 정의적 특성의 요소

범주	하위 요소	정의
정서: 비교적 강하게 단시간 동안 계속되는 감정. 희노애락, 애증, 공포, 쾌감 등	흥미	교과나 학습 주제 등에 대해 주관적으로 느끼는 선호도 및 학습 활동에 참여함으로써 발생하는 즉각적인 재미
	호기심	지속적이면서 일관되게 새로운 것을 추구하는 개인의 심리적 경향성
	수학 불안	수학 교과 자체 또는 수학과 관련된 일이나 문제 등에 대하여 긴장하고 두려워하거나 걱정하고 염려하는 심리 상태
신념: 어떤 아이디어, 사건, 행위 등과 같은 대상에 대해 여러 반응을 시도하고 다양한 시행착오의 과정을 반복하면서 형성된 가치 체계	수학관	문화적 가치와 사회적 기대를 경험과 학습을 통하여 내면화한 것으로 수학이 가지고 있는 교과로서의 특성과 그에 적절한 학습 방법에 관한 개인적인 관점
	가치 인식	사회적 맥락이나 학습자 자신의 삶의 맥락과의 관계 속에서 수학의 기능과 유용성에 대한 평가
	귀인	수학과 관련된 성공과 실패의 원인에 대한 개인적 지각으로 원인의 소재(내적 · 외적 요인), 안정성, 통제 가능성에 대한 추론
동기: 학습 활동을 유발하고 지속하게 하는 힘으로서 학습 활동을 의미 있고 가치 있는 것으로 보고 학습 활동으로부터 의도된 가치를 얻고자 하는 경향성	목표 지향성	성취 상황에서 개인이 과제를 수행하는 목표에 대한 개인의 지향성으로, 타인과 비교하거나 자신의 능력을 타인에게 증명하기 위한 목표인 수행 목표와 과제의 숙달이나 능력을 향상하기 위한 목표인 숙달 목표로 구분됨
	자기 효능감	목표 달성에 필요한 행동 과정을 조직하고 행하는 자신의 능력에 대한 믿음으로, 특정한 시간에 주어진 특정 과제를 잘 수행할 수 있는지에 대한 인식
	자기 조절력	개인적 목표 설정과 설정한 목표를 성취하기 위한 행동 조정으로, 장기적 목표 달성을 위해 바람직한 행동을 추구하고 그렇지 않은 행동은 억제하여 충동적이거나 즉각적이지 않고 스스로 문제를 신중하게 계획, 해결, 평가하려는 경향성

03 수학과 평가 절차

평가는 상황에 따라 다양한 형태로 시행되므로 모든 상황에 적용 가능한 평가 절차를 규명하기란 쉽지 않다. 하지만 교사가 평가 주체자가 되어 학생들의 수학적 능력이나 태도를 평가하는 경우에 초점을 두어, 평가 시행을 위한 기본 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

평가 목적 설정

↓

평가 목표 및 영역 설정

↓

평가 틀 개발(평가 방법 선정)

↓

평가 도구 개발

↓

평가 실시

↓

채점 및 결과 보고

[그림 Ⅴ-1] 수학과 평가의 기본 절차

평가를 하고자 할 때 가장 먼저 고려해야 할 것은 '어떤 목적으로 평가를 할 것인가'를 결정하는 일이다. 진단평가나 형성평가와 같이 교사가 자신의 수업에 대한 피드백을 얻기 위한 목적으로 평가를 실시한다면 수업을 진행하기 전이나 진행하는 도중에 평가를 실시하여 그 결과를 수업 개선에 활용하게 될 것이다. 반면 총괄평가와 같이 학생들의 성취 정도에 따라 등급을 결정하는 것이 목적이라면 보다 객관적인 평가 방법을 이용하며, 평가의 내용도 한 학기 또는 일 년 동안 학생들이 학습한 전체 내용을 포괄하는 것이 더 타당할 것이다. 이처럼 평가의 목적에 따라 평가 내용, 방법, 시기 등 진행되는 평가의 전체적인 모습이 달라지므로, 우선 평가를 하고자 하는 목적부터 염두에 두어야 할 것이다.

두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 결정한 평가 목적에 따라 평가하고자 하는 영역(이하 평가 영역)을 설정하고, 해당 영역의 주요 교육 목표가 무엇인지 확인하여야 한다. 이때의 교육 목표는 각 문항에 대한 구체적인 평가 목표를 뜻하는 것이 아니라 교육과정의 목표 및 내용에 준하여 해당 평가 영역의 교육 목표를 설정하는 것을 말한다.

세 번째 단계에서는 균형 있는 평가 도구 개발을 위하여 평가 틀을 개발하는 것이다. 평가 틀은 평가 영역의 교육 목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동 영역과 내용 영역, 평가 목표, 평가 문항 유형, 각 요소별 문항 출제 비율 등을 포괄적으로 포함한다.

또한 이때 평가하고자 하는 목적, 평가하고자 할 영역, 그리고 그 영역에 해당하는 교육 목표를 토대로 이에 부합하는 평가 방법을 선정하여야 할 것이다. 예를 들어 총괄평가를 실시할 목적으로 특정 평가 영역을 선정하여 해당 교육 목표가 확인되었을 때, 인지적 영역 능력에 관한 평가를 실시하기 위해서는 이에 부합하는 평가 방법을, 정의적 영역 능력에 관한 평가를 실시하고자 할 경우에는 이에 따른 적절한 평가 방법을 사용해야 할 것이다.

네 번째 단계는 위의 세 번째 단계를 통해 마련된 평가 틀에 부합하는 평가 도구를 개발하는 과정이다. 평가 도구 개발 시에 문항의 양호도, 검사 시행의 시간 소요 등을 고려하여 문항을 개발하고 그에 따라 모범 답안 및 채점 기준도 개발하여야 한다. 이때 '평가 도구 개발'이란 인지적 영역의 평가에서 지필 검사를 위한 평가 문항 개발, 채점 기준 및 예상 답안 작성과 정의적 영역에서의 평가를 위한 평가(주로 관찰 및 면담) 요목 개발, 기록 방법 작성 등을 총체적으로 일컫는 말이다.

다섯 번째 단계에서는 평가를 실시하고, 가채점을 통하여 사전에 준비한 채점 기준 및 예상 답안의 적절성을 검토하여 이를 수정 · 보완한 후, 이를 참고로 하여 실제적인 채점에 임하도록 한다.

마지막 단계로는 평가 목적에 따라 적절한 방법으로 기록하여 그 결과를 보고하도록 한다.

04 수학과 평가 틀 개발 시 유의 사항

학교 수학에서 수학 교육 목표를 내용과 행동 수준에 맞추어 평가하는 것은 바람직한 일이며, 이를 위해서는 수학과에 적합한 평가 틀을 마련하여야 한다. 평가 틀은 평가 도구 개발 및 평가의 전 과정에서 평가 방향과 평가 관련 항목을 선택하거나 결정할 때 판단의 준거가 된다. 평가 틀은 평가에 관한 보다 체계적이고 포괄적인 구조를 설명할 수 있다는 장점과 더불어 평가 문항과 내용 및 행동 영역의 적합성을 판정하고 설명하는 데 용이하다고 할 수 있다. 〈표 Ⅴ-2〉, 〈표 Ⅴ-3〉 참조

수학과 평가 틀을 개발하는 데 있어서 고려해야 할 제한 사항은 다음과 같다.

첫째, 일반적으로 평가의 목적은 우수 학생을 선발하려는 것이 아니고 학생들의 교육 성취 정도(수준)가 얼마나 되는지, 그리고 각각의 수준에 도달한 학생들이 얼마나 되는지 파악하는 데 있으므로 평가 틀이 학생들의 성취 수준을 골고루 측정해 낼 수 있도록 세워져야 한다. 그러므로 가장 기초가 되는 수준에서부터 우수한 학생까지의 성취 정도가 잘 드러날 수 있도록 다양한 수준의 문항으로 구성되어야 한다.

둘째, 가능하면 평가 요소를 적어도 내용 영역과 행동 영역으로 이원화하도록 한다. 특히 행동 영역을 설정하여 소홀하기 쉬운 '지식의 활용 또는 적용' 능력에 의미 있는 비중을 두도록 한다. 동시에 폭넓은 수준의 학업 성취의 정도를 파악할 수 있도록 행동 영역을 가장 기초적인 지식이나 단순 계산에서부터 보다 복합적인 사고를 요구하는 탐구나 문제 해결 능력까지 평가의 대상으로 삼아, 학생들이 어느 영역에 더 높은 성취를 보이는지 파악할 수 있도록 한다.

셋째, 평가 틀의 구성에 있어서 시대적 요구가 강한 행동 영역을 의도적으로 평가 틀에 포함시키도록 한다. 예를 들어 의사소통 능력과 같이 시대적으로 강력히 요구되고 있으면서도 실제 학교 현장에서는 소홀히 다루어지는 능력을 평가 틀에 과감히 도입함으로써 학교 교육과정 운영에 있어서 선도적 역할을 기대해 볼 만하다.

〈표 Ⅴ-2〉 수학과 평가 틀의 예

행동 영역 / 내용 영역	계산	이해	추론	문제 해결
수와 연산				
문자와 식				
함수				
확률과 통계				
기하				

〈표 Ⅴ-3〉 수학과 평가 틀에서의 인지적 행동 영역의 정의

행동 영역	정의
계산	여러 가지 계산법, 나아가 문제 해결에 이르기 위한 명확한 절차, 즉 알고리즘을 능숙하게 구사할 수 있는 능력에 관한 것
이해	기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성을 이해하여 의미 충실한 개념적 사고를 형성할 수 있는 능력에 관한 것
추론	• 관찰, 열거, 실험 등을 통한 귀납과 유추, 추측에 의해 수학적 법칙과 문제의 해법을 발견할 수 있는 능력에 관한 것 • 조건명제의 증명, 삼단논법에 의한 연역적 추론, 반례에 의한 증명, 간접증명법, 모순법, 동치인 명제의 증명, 수학적 귀납법 등을 이용한 증명을 읽고 이해할 수 있으며, 이러한 방법을 사용하여 수학적 명제를 증명할 수 있는 능력에 관한 것
문제 해결	• 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 수학 내적인 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것 • 수학과 일상생활 및 타 교과 내용과의 관련성의 파악이 요구되는 통합 교과적(수학 외적)인 소재의 응용 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것

05 서술형 및 수행 평가 문항의 채점 방법

서술형 또는 수행 평가 문항 등에서 학생들은 문제(질문 내용)조차 이해하지 못하는 경우, 문제는 이해했으나 풀이 과정이 틀린 경우, 또는 풀이 과정은 옳으나 계산 과정이 미흡하여 실제로 결과를 나타내는 부분이 틀린 경우 등 여러 가지 반응을 나타낸다. 실제로 학생들의 문제 풀이를 평가하는 데 있어서 가장 어려운 부분은 여러 가지 유형의 오류들을 드러내는 풀이를 어떻게 평가할 것인가를 결정하는 일이다. 이때 풀이 과정을 중시하여 채점하는 방법으로는 '분석적 점수화 방법'과 '총체적 점수화 방법'을 들 수 있다(Charles, et. al., 1987).

먼저 '분석적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 단계(과정)를 구체화하여 각 단계별로 채점 요소를 세우고 점수를 배당하는 방법을 말한다. 이때 어떤 특정 요소에 대한 채점 결과가 다른 요소에 대한 채점 결과에 영향을 주어서는 안 되며, 각 문항마다 채점 요소를 지나치게 세분화하지 않도록 한다. 분석적 점수화 방법은 학생 개개인의 답안지를 면밀히 분석해야 하므로 채점하는 데 많은 시간을 필요로 하지만, 주어진 문제의 해결 과정에 따라 단계별로 수치화한 점수를 부여함으로써 채점자 간의 평점 차를 줄이고 동일한 채점자 내에서도 일관성 및 객관성을 유지할 수 있다는 것이 주요 장점이다. 한편 '총체적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 특정 내용이나 과정에 대하여 각각 점수를 부여하는 대신, 풀이 전반에 걸쳐 하나의 점수를 부여하는 방법을 말한다.

서술형 및 수행 평가 문항의 채점을 위한 채점 기준은 주로 분석적 점수화 방법을 토대로 문제 이해, 문제 해결 과정, 답 구하기 등의 과정이 반영되도록 작성한다. 이를 작성하는 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 적절히 부여하도록 한다. 다음은 서술형의 문항에 대한 채점 기준을 분석적 점수화 방법으로 제시한 예이다.

【문항】

작년에 A 중학교의 학생 수는 1050명이고, 금년에는 작년보다 남학생은 $4\,\%$ 증가하고 여학생은 $2\,\%$ 감소하여 전체적으로 9명이 증가했다. 금년의 남녀 학생 수를 각각 구하여라.

【모범 답안】

작년의 남학생의 수를 x, 여학생의 수를 y라고 하면

$$\begin{cases} x+y=1050 \\ \dfrac{4}{100}x-\dfrac{2}{100}y=9 \end{cases}$$

이므로 $x=500$, $y=550$이다.

따라서

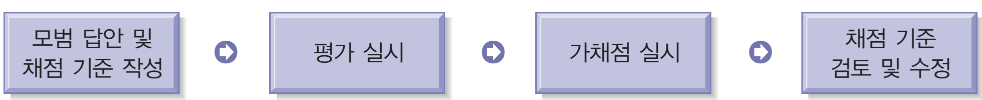
금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times 500=520$(명)

금년의 여학생의 수: $550-\frac{2}{100}\times 550=539$(명)

【채점 기준】

영역 \ 요소	채점 요소	배점
문제 이해	작년의 남학생 수를 미지수로 정하기	1점
	작년의 여학생 수를 미지수로 정하기	1점
해결 과정	작년의 학생 수에 관한 식 세우기	1점
	작년보다 늘어난 금년의 학생 수에 관한 식 세우기	3점
답 구하기	금년의 남학생 수 구하기	2점
	금년의 여학생 수 구하기	2점
총점		10점

서술형 및 수행 평가 문항에 있어서 모범 답안은 채점 기준을 작성하는 데 있어서 구체적인 지침의 역할을 한다. 문항의 특징이나 성격에 따라 다르겠지만, 일반적으로 수학 교과의 특성상 피험자가 다양한 창의성을 발휘하여 평가자가 생각하지도 않았던 여러 가지 형태의 답을 제시할 가능성은 그리 높지 않다. 하지만 서술형 문항의 경우에는 답안을 작성하는 과정에서 실수나 오답의 가능성이 높으므로 이에 관한 채점 기준을 마련하여 채점 결과의 공정성을 유지해야 할 것이다. 이에 따라 모범 답안과 그에 따른 채점 기준을 구체적으로 마련하고 평가를 실시한 후 이미 작성된 채점 기준(안)을 토대로 일부 학생들의 실제 답안을 '가채점'하는 일은 매우 중요하다고 하겠다. 이는 채점 기준의 요소 중에서 채점자(교사)가 미처 생각하지 못하였던 채점 요소나 부적절하게 배당된 요소별 점수가 있는지를 검토하고, 미비한 부분을 보완 · 수정하기 위함이다. 위와 같은 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

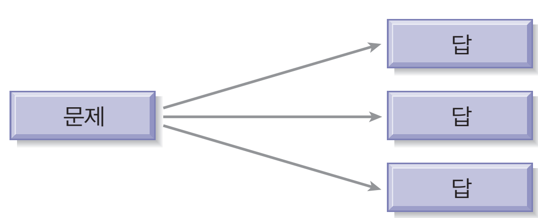


[그림 Ⅴ-2] 채점 절차

06 프로젝트

가. 프로젝트의 의미

프로젝트의 사전적 의미는 '실행 계획서'이지만, 수학 교육에서 프로젝트는 보다 넓은 의미로 무엇을 할 것인가뿐 아니라 그것을 실제로 수행하여 자료를 제시하고 그 결과를 평가하는 것을 포함한다. 프로젝트는 열린 반응을 요구하는 일종의 수행 과제를 말하며, 이때 개방형 문제, 즉 열린 반응(open-ended, open-responded) 문제는 해답이 정해져 있지 않고 학생의 관점에 따라 여러 가지 답이 나올 수 있는 문제를 말한다. 하지만 경우에 따라서 개방형 문제의 답은 모범 답안이 제한되지 않을 수 있다. 즉 결정되지 않을 수도 있다.



[그림 Ⅴ-3] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

【개방형 문제의 예】

숫자 4를 네 번 사용하고 $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ }$, 분수 등의 기호를 써서 0부터 9까지의 수를 만들어 보아라.

【풀이】

$$0=4+4-4-4=44-44$$
$$1=\frac{4}{4}+4-4=\frac{44}{44}=\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{4}{4}\div\frac{4}{4}$$
$$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=4-\frac{4+4}{4}$$
$$3=\frac{4+4+4}{4}$$
$$4=(4-4)\times4+4=\sqrt{4+4+4+4}$$
$$5=\frac{4\times4+4}{4}$$
$$6=\frac{4+4}{4}+4=\frac{4+4+4}{\sqrt{4}}$$
$$7=\frac{44}{4}-4=\{4-(4\div4)\}+4$$
$$8=4+4+4-4=\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$$
$$=4\times4\div4+4=4\times4-(4+4)$$
$$9=4+4+\frac{4}{4}$$

학생들은 열린 반응의 과제들을 수행하기 위하여 어떤 수학적 지식을 사용해야 하는지를 결정해야 할 뿐만 아니라 때로는 어떻게 접근해 나아가야 할 것인가에 관한 수학적 방법까지도 결정해야 한다. 이에 따라 프로젝트는 학생들의 실제 생활과 직접 관련되어 그들의 고등 사고 능력을 발휘할 수 있는 문제 상황을 주제로 제시함으로써 과정 중심의 수행 경험을 하게 한다.

나. 프로젝트의 특징과 개발 시 유의점

프로젝트의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 프로젝트는 어떤 특수한 상황에서 개인이 원하는 바의 깊이 있는 탐구를 가능하게 하므로, 프로젝트의 주제 및 진행 과정을 개별화 또는 차별화하여 개성에 맞게 다룰 수 있다.

둘째, 프로젝트는 구체물에서 서적, 영화, 비디오 등의 매체에 이르기까지 다양한 자료에 대하여 수학적으로 해석하고 설명하는 과정을 포함하므로, 다른 교과 내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적인 사고 능력을 신장시킬 수 있다.

셋째, 프로젝트는 소그룹의 협동 학습을 통하여 학생들이 자신이 속한 집단의 다른 구성원들과 이야기하고 그들의 활동 결과를 학급 전체에 (말하기와 쓰기의 형태로) 전달함으로써 의사소통 능력을 신장시킬 수 있다.

한편 다음은 프로젝트 개발 시 유의해야 할 사항이다.

첫째, 프로젝트는 학생들이 수학적인 안목에서 현상을 파악할 수 있는지, 또는 배운 수학적 지식을 사용하여 생활의 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 것으로, 판에 박힌 문제(정형 문제)를 지양하고 참신하고 새로운 성격의 주제(문제)를 개발하도록 한다.

둘째, 프로젝트의 채점을 위한 채점 기준은 총체적 점수화 방법과 분석적 점수화 방법을 적절히 고려하여 작성한다. 서술형 문항의 경우와 마찬가지로, 프로젝트의 채점 기준(표)의 작성 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 부여하도록 한다.

다. 프로젝트의 채점 방법

프로젝트의 수행 과정은 다음 〈표 Ⅴ-4〉와 같은 기록지를 사용한 자기 평가(self-assessment) 방법을 이용하여 학생 스스로 작성해 보게 하고, 이를 평가하거나 점검하는 것이 용이하며 바람직하다(황혜정 외, 1997).

〈표 Ⅴ-4〉 학생 자기 평가 기록지(예)

학생 자기 평가 기록지

단원명: ______________________________

날 짜: ______년 _____월 _____일 _____교시

이 름: ______________________________ (_____학년 _____반 _____번)

주제(문제):

해설(풀이):

반성(소감):

자기 평가:

아주 못함( ) 못한 편임( ) 잘한 편임( ) 아주 잘함( )

교사 논평:

점선을 따라 자르세요.

한편 프로젝트의 전반적인 활동 과정 및 결과에 대하여 평가하고자 할 때, 다음과 같이 관찰에 의한 평정척도지를 활용하면 편리하다(Krulick 외, 1998).

〈표 Ⅴ-5〉 평정척도법을 이용한 과제 수행 능력 평가(예)

이름: ________________ 날짜: ________________

평정척도

1=불충분 2=만족 3=훌륭함

관찰(면담) 요목			0	1	2	3	논평
과제 수행 능력	주제 이해						
	해결 전략 선정						
	계획 수행						
	검토 및 반성						
	의사소통						
	태도						

07 관찰 및 면담

가. 관찰 및 면담의 특징

관찰 및 면담에서 평가자는 수학 문제의 해결을 위하여 사고하고 있는 개인, 소집단, 또는 학급에 대하여 관찰 내지 면담을 하면서 기록하게 된다. 이 방법은 수학적인 수행 능력과 같은 인지적 영역뿐 아니라 수학에 대한 태도와 신념 등 정의적인 영역까지 평가할 수 있는 장점이 있다. 또한 관찰 및 면담은 검사를 통해 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있다. 하지만 우리나라 교육 현실을 감안할 때, 독자적인 평가 기법으로서의 역할보다는 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완하는 보조 역할의 의미가 크다.

특히 관찰의 목적으로 사전에 생각하지 못하였던 측면에 대하여도 부수적인 자료를 수집할 수 있다. 또 관찰은 정규 수업 시간 중에 자연스럽게 이루어질 수 있고, 특정한 사고력에 중점을 두고 평가할 수 있으며, 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완할 수 있다.

관찰이나 지필 검사와 더불어 면담은 학생들과 직접 대화함으로써 문제 해결 상황에서 실제로 나타내 보인 행동이나 서면의 '결과'를 도출해 내기까지의 사고 '과정'에 대한 통찰을 가능하게 하는 기법이다. 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

나. 관찰 및 면담의 유형

실제로 현장에서 사용할 수 있는 관찰법은 수업 시간에 교사가 학생들을 대상으로 실시하는 비참여 관찰로, 학생 전체 또는 소집단이나 개인별로 자연스럽게 행해질 수도 있다. 다만 교사가 수업을 진행하면서 관찰 결과를 기록할 수 있는 시간이 한정되어 있으므로, 학급 전체보다는 개별 또는 소집단을 대상으로 관찰을 실시하는 것이 효과적이다. 그런데 사실 비참여 관찰의 경우 객관적으로 관찰이 가능하나 관찰의 기회가 적고, 심리적으로 격리되어 있기 때문에 미세한 변화를 파악하기 힘들다.

한편 공식적 면담은 면담자가 미리 만들어진 일련의 질문을 가지고 응답자에게 질문하는 방법이다. 이때 각 면담에서는 똑같은 질문이 똑같은 방법으로 부과되므로, 공식적 면담은 질문지를 언어로 표현하는 방법이라고 볼 수 있다. 이에 반해 비공식적 면담은 면담 계획을 세우되 면담 목적만을 명백히 하여 융통성 있는 접근을 시도하는 방법이다. 따라서 연구자(교사)가 한 현상에 관한 적절한 질문들을 충분히 가지고 있지 않을 때 유용하다. 이러한 면담은 예정된 '질문군'이 없고 본질적으로 탐색전부터 시작한다고 볼 수 있다.

결국 면담이 공식적으로 진행되든 비공식적으로 진행되든, 교사는 주로 정규 수업 외의 상황에서 학생들과의 면담을 통해 그들과 직접 대화함으로써 그들이 수학 수업 상황에 어떻게 수용하고 대처하는지에 대해 보다 깊은 이해를 구할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 (비공식적) 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

특히 공식적 면담은 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별하는 데 유용하며, 비공식적 면담은 그들을 진단, 선별하는 것뿐만 아니라 그들의 능력에 따른 처치도 가능하다. 면담은 주로 개별적으로 진행하는 것이 상례이지만, 비공식적 면담의 경우에는 소그룹별로 면담을 진행하여 면담 대상자들끼리 보다 자연스러운 분위기에서 진행됨으로써 보다 정확한 정보를 얻을 수 있는 이점도 있다.

다. 관찰 및 면담 시 유의 사항

일반적으로 관찰을 통해 정기적으로 기록하여 평가하기 위해서는 관찰자인 교사의 많은 시간과 노력이 절대적으로 필요하며, 관찰 목적에 알맞은 현상을 포착하기 어려울 때도 있다. 또한 학생들의 반응을 관찰할 때 편견

을 가지게 되어 관찰 결과에 주관성이 개입될 여지가 있으며, 관찰의 대상이 되는 학생들 역시 관찰자인 교사를 의식하면서 행동이 달라질 수 있다. 사실 교사가 관찰만을 통하여 학생들의 다양한 행동이나 사고 과정 등을 정확히 파악하기는 어렵다.

관찰 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 뚜렷한 관찰 목적 또는 문제 의식을 가지고 관찰에 임하도록 한다.
- 관찰 계획을 치밀하게 세워야 한다.
- 부분과 전체의 관련을 지으며 관찰함으로써 피상적인 관찰이 되지 않도록 해야 한다.
- 객관적인 태도로 관찰해야 한다.
- 관찰 기간은 짧게 하고 누적시키는 방법을 쓰도록 한다.

공식적 면담의 경우에는 면담 도중 학생의 반응에 개입하는 일이 없으므로, 사전에 질문 내용들을 신중히 계획하여 작성하면 별 문제가 없으나, 비공식적 면담에서는 교사가 학생의 반응에 따라 수시로 질문하게 되므로 더욱 주의를 해야 한다.

면담 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 면담 시 교사의 반응이나 질문으로 인해 대화의 방향이 바뀌어서는 안 되므로 교사의 태도(반응)는 중립적 입장을 취해야 한다.
- 질문의 내용과 시기가 적절해야 한다.
- 학생이 편안하고 안정감을 가지도록 면접 환경과 조건을 구성해야 한다.
- 교사가 면담 시 기본적으로 갖추어야 할 태도는 중립적인 태도, 공정한 태도, 자연스러운 태도, 담화적인 태도, 친절한 태도이다.

라. 관찰 및 면담의 기록 방법

관찰 및 면담의 목적이 결정되면 대상, 장소, 시간, 기록 유형 등의 세부 계획이 진행되어야 하며, 이때 활용될 수 있는 기록 방법에는 체크리스트와 평정척도법 등이 있다.

체크리스트나 평정척도법은 사전에 관찰할 행동 요목을 제작하는 과정에서 많은 시간과 노력이 요구되지만, 그 기록 자료를 재분석하지 않고 평가 자료로 수월하게 활용할 수 있다. 그러나 체크리스트나 평정척도법은 사전에 치밀하게 관찰 요목을 작성하여도 임의적이고 예측하지 못하는 행동이 발생하는 경우에는 적절한 기록을 수행하기가 곤란한 단점이 있다.

관찰 및 면담의 자료(정보)를 수집하면, 그다음 단계로 그 정보들을 요약하고 행동의 패턴을 결정하는 작업이 필요하다. 물론 기록 형태에 따라 정보를 요약하는 방법이 다양하게 개발될 수 있다. 일반적으로는 관찰에 의해 기록된 자료들을 그래프 및 빈도, 시간, 가중치의 평균 등의 기술 통계 수치로 분석한다. 그러나 학교 현장에서는 기록된 자료를 진술문 형태로 요약하여 교사의 전문적 판단에 따라 필요한 조언을 하는 것이 보다 수월하고 바람직하며, 이는 학교생활기록부에서 각 교과에 대한 학생의 발달 상황을 작성하는 기초 자료가 될 수 있다.

관찰 및 면담은 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제 집착력과 의지, 창의적 사고, 수학 수업에의 참여 등 정의적 영역을 평가하는 데 용이하다. 다음 〈표 Ⅴ-6〉은 여러 정의적 영역에 대한 평가를 위하여 체크리스트를 사용하여 관찰 또는 면담이 가능한 구체적인 요목들을 제시한 예이다(박선화 외, 2010).

〈표 Ⅴ-6〉 정의적 영역 평가를 위한 체크리스트지(예)

체크리스트					
정의역 영역	관찰(면담) 요목	학생 1	학생 2	학생 3	학생 4
수학에 대한 흥미와 호기심	• 수학을 하는 것을 즐거워한다.				
	• 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다.				
	• 수학 수업 시간을 기다린다.				
	• 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다.				
	• 수학의 개념이나 원리를 알려고 한다.				
수학에 대한 자신감	• 수학 공부에 자신감을 가지고 있다.				
	• 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다.				
	• 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다.				
	• 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.				
수학에 대한 불안	• 수학 수업이 어려울까 봐 걱정한다.				
	• 수학 성적이 나빠질까 봐 걱정한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 긴장한다.				
수학의 유용성 인식	• 수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다.				
	• 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.				
과제 집착력과 의지	• 수학 공부를 열심히 한다.				
	• 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다.				
	• 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다.				
	• 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.				
창의적 사고	• 다른 사람의 방법을 그대로 따라 하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.				
수학 수업에의 참여	• 수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다.				
	• 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다.				
	• 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.				

VI. 좋은 수업의 의미

01 좋은 수업에 대한 관점의 변화

어떤 수업이 좋은 수업인가에 대한 견해는 구성주의 이론의 도래와 함께 바뀌기 시작하였다고 볼 수 있다. 구성주의 인식론에서는 지식을 개인이나 집단이 적극적으로 만들어 낸 경험적 구성물로 본다. 즉, 학생들은 모든 지식을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 학생 스스로 능동적 구성 활동에 의해 이를 형성한다는 것을 그 주된 요지로 삼고 있다. 이와 같은 관점에서 생각해 볼 때 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 개념을 탐구하고 개념 사이의 관련성을 잘 이해할 수 있도록, 다시 말해 구성 활동이 잘 일어날 수 있도록 총체적인 환경을 조성해 주는 것이다.

학습 기회의 제고라는 측면에서 좋은 수업을 진단할 때, 학습 기회란 수업을 통해 가르쳐진 것과 평가되어지는 것 사이의 중복 정도를 의미한다. 이는 수업 중에 다루어지는 교육과정의 내용과 평가의 내용이 수업의 주요 목표를 반영해야 함을 뜻한다. 그러므로 1980년대 이래로 교육과정의 개정은 교사가 아닌 학생 중심의 교육을 강조하고, 실생활과 학교 교육 내용을 연결시키며, 단순 암기나 훈련보다는 이해와 사고에 초점을 두어 왔다.

따라서 진정한 학습은 일상의 학습 상황에서 다양한 정보와 같은 인지적 도구 혹은 다른 사람들의 도움을 받아 학생들이 확실하게 어떤 문제 상황을 파악할 수 있을 때 일어난다고 볼 수 있다. 그러므로 학습자는 문제를 해결하면서 개개인이 직접 이미 알고 있던 지식을 사용하여 새로운 지식을 만들어 내는 과정을 통하여 자신의 생각을 다양한 방법으로 적용하고 또 새로운 의미를 창출함으로써 그와 관련된 내용을 이해하게 된다는 것이다 (von Glasersfeld, 1993).

다시 말하면 구성주의에 입각한 수학 수업의 방법은 어떤 개념을 습득함에 있어서 고정되고 활동력이 없는 인식이 아닌 가변적이고 유용한 인식의 발달을 강조한다. 학습은 사회 활동을 하는 가운데 일어나며 학습자들 간, 혹은 교사와 학생 사이에 생각이나 아이디어를 서로 교환함으로써 이해를 증진시킨다(남승인, 1998). 이때 교사는 학생 스스로가 의미 있는 학습 활동에 참여할 수 있도록 도와주어야 한다. 아울러 학습자는 능동적이고 무한한 잠재력과 가능성을 가지고 있다고 보며, 따라서 학습자 개개인의 생각과 아이디어를 학습 활동에 최대한 반영하여야 한다는 것이다. 이렇게 볼 때 중앙집권식 교육과정의 편성 · 운영을 탈피하고 현장 중심으로 전환함으로써 학습자들을 보다 창의적인 교육과정에 의해 가르칠 수 있게 된다고 본다(최승현 외, 2002).

〈표 Ⅵ-1〉 좋은 수업을 위한 교수-학습 관점의 변화

교수-학습 관점의 변화		
강의식 전체 수업, 교사의 지시 중심 수업	➡	경험적, 귀납적, 실제적인 학습
수업 시간 중 학습자의 수동성: 좌석에 앉아 있기, 정보를 듣고 암기하기	➡	수업 시간 중 학습자의 능동성: 모든 학생들이 학습에 직접 참여하기
학습지, 시험지, 연습지 등의 활동	➡	고등 사고력을 강조한 중심 개념과 원리 배우기
모든 교과 영역의 많은 학습량을 교사가 직접적으로, 간단히 다루기	➡	학습의 과정(계획, 정리, 관찰, 평가)에 대한 학습자의 책임하에 학습자 자신이 직접 연구 과제를 결정하기
어떤 사실이나 사항을 단순 암기하기	➡	학습자 개개인의 정의적인 요구나 다양한 인식 양식에 관심을 가지기

성적이나 학업 경쟁을 강조하기	교실을 독립된 작은 사회로 만들기 위한 협동 또는 합작 활동
능력별 그룹을 만들거나 능력별 이름 붙이기	다양한 능력의 학생들을 같은 그룹에 배치하여 활동하기
특별 프로그램을 대용하기	교사, 학부모, 학교 직원들의 다양하고 협동적인 역할을 활용한 일반 학급에서의 특별 지도
표준화 검사를 사용하기	교사들의 관찰로 얻어진 질적 형태의 기술적 평가 사용하기

02 수학과 좋은 수업의 조건

수학과 교과 특성을 반영한 '좋은 수업'이란 '좋은 수업'에 대한 범교과적 정의와 그 궤도를 함께하면서, 수학 수업과 관련하여 현장의 교사들이 제기하는 문제점들을 효과적, 현실적으로 해결해 나가고 있는 수업들이라는 가정하에, 현장의 수학과 수업 지도와 관련하여 제기되어 온 문제점을 감안한 수학과 좋은 수업 선정 기준은 다음과 같다(최승현 외, 2002).

가. 교육과정과의 일관성을 유지하면서 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업이어야 한다.

현장의 수학 교사는 수학과 목표와 본질에 부합되면서 학생들의 요구, 능력 및 흥미에 알맞게 교육과정을 재구성할 필요가 있다. 실제로 좋은 수업을 진행하는 교사는 장기적인 기대, 학습 목표, 계획, 학습 활동, 자료 및 평가의 모든 측면을 포함하여 교실 수준에서 실행된 교육과정을 계획, 실천 및 평가하여야 한다(NCTM, 1993). 그뿐만 아니라 수업 목표와 목표 달성을 위하여 모든 교육과정의 요소들을 결합한 일관성 있는 체제를 유지해야 한다.

교육과정과 학습 내용 사이의 일관성을 유지하는 것은 학생들로 하여금 유의미한 지식을 구성할 수 있도록 한다. 즉, 학생들이 학교 밖 생활에서도 쉽게 접근하여 활용할 수 있는 지식을 구성할 수 있도록 하여야 한다. 이때 교사는 (1) 수학과 교육과정과 일관성을 유지하면서 핵심적인 내용들을 심도 있게 학습할 수 있도록 학습 내용의 폭을 줄이고, (2) 학습 내용을 중요한 개념 중심으로 구조화하여 제시하며, (3) 주요 개념들과 그들 사이의 관련성을 쉽게 설명할 수 있도록 교육과정 내용을 재구성하고, (4) 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업의 결과를 반영하는 학습 활동과 평가 방법을 학생들에게 제공해야 할 것이다.

나. 수학 수업에서는 수학적 경험이 실생활에 활용되는 가치 있는 것임을 학생들이 인식하여 실생활의 수학적 상황에 전이될 수 있도록 해야 한다.

현장의 수학 수업에서의 문제점은 현실과 유리된 많은 양의 수학적 지식을 교과서나 틀에 박힌 수업 양식에 의존하여 가르친다는 것이다. 좋은 수학 수업을 위해서는 학생들 스스로 문제를 이해하고, 문제 해결의 과정에 관련된 다양한 전략들을 활용하여 실제적으로 문제를 해결하며, 그 과정을 반성해야 한다. 즉, 학생들이 설계한 문제 해결 활동이 이루어지는 기회를 제공하여야 한다. 학교에서 배운 수학이 학교 밖의 다른 실제 상황들에서 활용될 수 없다면, 수학을 학습할 필요성이 줄게 된다. 즉, 학교에서 배운 수학 지식은 실생활에 적용될 때 보다 유의미해진다. 따라서 좋은 수학 수업이란 학생들이 수업 시간에 배운 지식, 이해, 추론 및 문제 해결을 다른 학문 분야에는 물론 실생활 상황에도 적용할 수 있도록 가르치는 수업이다. 장래에 수학이나 과학과 관련된 직업에 종사하게 될 학생들뿐만 아니라 교양을 갖춘 시민이

되기 위하여 학교 수학 교육은 우리가 살아가고 있는 현실 세계에 대한 이해와 흥미를 길러 줄 수 있어야 한다(OECD, 2001).

학교에서는 도형의 넓이나 부피에 대하여 배우지만 실생활에서 어떻게 활용되는지, 어떤 경우에 필요한지를 파악하지 못한다면 이러한 내용들을 학습하는 의미가 반감된다. 그러므로 수학 교사들은 학교 수학을 대학 입시를 위한 과목으로만 중요하게 취급할 것이 아니라, 현실 세계를 살아갈 수 있는 수학적 소양을 갖춘 시민을 양성한다는 취지를 잊지 말고 가르쳐야 할 것이다. 이러한 맥락에서 수학 교사의 중요한 역할은 수학적 능력이 지역 공동체 속에서, 학생들의 일상생활 속에서, 나아가 보다 광범위한 사회적 당면 과제들 속에서 어떻게 적용되는가를 학생들이 파악할 기회를 제공하여야 한다(NCTM, 1989, 1991). 그러므로 학교에서 배운 것을 다른 상황으로 전이할 수 있는 학생의 능력 양성을 위해 교사는 다음과 같은 측면을 강조하여 수업하여야 한다.

- 적절한 수준의 내용을 이해하지 않고서는 실생활로의 학습 전이는 기대하기 어려우므로, 학습한 내용을 숙달하도록 한다.
- 학생들이 학습한 내용에 대하여 다른 상황으로 전이할 수 있음을 인식하도록 한다.
- 학습한 내용과 관련된 교과 내 다른 영역과 타 교과 영역에 적용하도록 한다.
- 학생들이 스스로 학습하고, 스스로 평가한 결과를 피드백할 수 있도록 돕는다.
- 단순 암기보다는 이해를 추구하는 수업을 진행한다.

다. 수학 수업은 현대의 수학 지식을 반영하는 내용과 첨단 기술의 발달을 반영한 기술과 도구의 학습이 요구되므로 컴퓨터, 멀티미디어 및 다른 기술 등과 통합되어야 한다.

수학이 생성되고 응용되는 방법이 현대화되면서 학생들이 배워야 하는 수학적 아이디어나 수학적 입장도 변화되고 있다. 예를 들어 학교 수학에서는 규칙이나 공식으로 설명될 수 있는 필연적인 사건을 주로 다루는 반면, 실생활의 현상에서는 임의의 모델인 경우가 대부분이다. 이러한 변화의 원동력은 컴퓨터의 보급이다. 컴퓨터의 도입으로 지금까지는 생각지 못했던 새로운 유형의 문제를 만들 수 있게 되었고, 수학의 내용과 방법도 많이 달라졌다. 예를 들어 연속적인 것에서 이산적인 것으로, 정확한 것에서 반올림한 값으로, 추상적인 것에서 구체적인 것으로, 이론적인 것에서 경험적인 것으로 변화되었다.

컴퓨터와 계산기는 수학적 아이디어와 응용을 탐구할 기회를 제공한다. 예컨대 저학년의 학생들도 계산기 자체를 수학적인 대상으로 생각하며 계산기의 기능과 규칙을 배울 수 있다. 고학년의 학생들은 그래픽 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프, 함수의 변환을 탐구할 수 있으며, 그 결과 함수 관계를 전보다 더 쉽게 이해할 수 있을 것이다(신동선 외, 1998). 이와 같이 공학적 기술 도구의 사용은 학습 환경을 풍부하게 만들 뿐만 아니라 학습의 질을 향상시킨다. 즉, 학생들은 이러한 기술이 없었다면 불가능했을 활동들을 경험하고 참여할 수 있게 된다. 인터넷이나 모의실험(simulation) 등의 기술들은 수학과 실생활을 연결시키고, 나아가 학습 환경을 보다 넓은 범위로 확산시킬 수 있는 능력을 가지게 한다.

라. 학생들의 선행 지식(기존 지식)을 고려한 수학 수업이어야 한다.

좋은 수학 수업은 새로운 지식을 선행 지식에 관련시킬 수 있는 수업이어야 한다. 그러나 학생들이 선행 지식을 지니고 있는 것만으로 바람직한 학습 결과를 가져오지는 않으며, 학생들이 선행 지식을 새로운 이해와 학습에 활용할 수 있도록 교사가 학습자의 선행 지식에 관심을 기울이고, 이러한 선행 지식을 수업의 출발점으로 활용할 때 비로소 학습이 촉진될 수 있다. 그러므로 수학과 좋은 수업을 위해서는 교사가 학생들이 이미 지니고 있는 선행 지식을 이끌어 내고, 직접적인 체험 활동이나 사고 활동을 통하여 새로운 개념을 도입하며, 나아가 학생들의 기존의 개념을 새로운 개념과 연결하여 통합적인 개념으로 수정해 나가야 한다(Driver 외, 1995).

이와 같이 학생들이 선행 지식을 활성화하여 수학과 학습에 활용할 수 있도록 수업을 할 때, 교사는 다음과 같은 측면을 고려해야 한다.

- 교사는 학생들이 가지고 있는 선행 지식이 무엇인가 정확히 파악하여야 한다.
- 교사는 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 활성화하도록 수업 시작 시 수업의 내용에 대하여 논의한다.
- 때때로 학생들의 선행 지식이 불완전하거나 치명적인 오개념을 포함하고 있을 수도 있으므로, 교사는 학생들이 지니고 있는 불완전하거나 잘못된 개념을 상세히 조사할 필요가 있다.
- 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 갖추지 못한 경우, 교사는 중요한 선수 학습 자료들을 미리 다루어 수업 진행에 차질이 없도록 해야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 학습 내용을 연관지을 수 있도록 적절한 질문을 제공하여야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 개념의 관계를 파악하고, 또 다른 형태의 통합적인 개념을 형성하도록 도와야 한다.
- 교사는 교수-학습에 관한 인지심리학의 이론에 초점을 맞추어 수업해야 한다.

마. 학습자 스스로 문제 해결 활동을 수행할 수 있도록 이끄는 수업이어야 한다.

좋은 수업이란 학생들로 하여금 주어진 수학 문제를 이해하고 그 풀이 과정을 추론하며 이를 이용하여 문제를 해결할 뿐만 아니라 교사나 다른 학생들에게 자신의 방법을 설명할 수 있도록 하는 일련의 학습 전략을 가르치는 수업이다. 보스니아도(Vosniadou, 2001)는 교사가 학생들에게 학습 전략들을 가르치기 위한 체계적인 노력을 할 때, 학생들이 실질적인 성과를 얻을 수 있다고 주장하였다. 이러한 학습 전략들은 학습 과정을 촉진하고 학습을 제고할 뿐더러 학생들이 주어진 상황에 적절한 방법으로 문제를 이해하며 이를 해결할 수 있도록 돕는다는 측면에서 중요하다. 그러므로 문제 해결에 있어서 보다 적용 범위가 넓을수록 성공적인 학습 전략이 된다.

여기서 중요한 것은, 교사는 학생들에게 단순히 수학적 지식의 전달과 수학을 하는 방법을 가르치는 것에만 국한할 것이 아니라 학생들에게 자신의 학습을 스스로 관리, 감독할 수 있는 메타인지 학습 전략을 가르쳐야 한다는 것이다. 구체적인 학습 기능과 내용도 중요하지만, 학습자가 스스로의 학습 과정을 감독하고, 학습이 일어나는 중에 자신의 마음에 어떤 변화가 일어나는지를 의식한다는 것은 보다 고차원의 학습을 위해 중요하다. 즉, 학생들은 주어진 학습 목표 달성을 위해 자신의 학습 진행 과정을 측정하고, 끊임없이 감독하고, 스스로 조절하며, 반성적으로 사고할 필요가 있다.

학습에서의 자기 조절(self-regulation)이란 학습자 자신이 스스로의 학습 과정을 평가하고 이해 수준을 점검하며, 필요시 실수를 수정할 수 있는 전략들을 개발하는 것을 포함한다. 교사는 다음과 같은 기회를 제공함으로써 학생들이 자기 조절적인 학습자가 되도록 도울 수 있다.

- 문제를 해결함에 있어서 학생 자신이 문제 해결 전략이나 방법을 계획하도록 한다.
- 사용 가능한 가장 효과적인 학습 전략들은 무엇이며, 이들을 어떻게 사용할 것인지를 알도록 가르친다.
- 학생 스스로 자신의 수학적 사고 과정을 점검하고, 이해 수준에 따라 문제가 요구하는 질문에 답할 수 있도록 한다.
- 주어진 진술문이나 주장, 문제에 대한 해결책 등에 대하여 평가하도록 한다.

바. 학생들의 동기 유발이 가능한 수학 수업이어야 한다.

일반적으로 학습에 대한 동기가 유발된 학습자는 설정한 목표를 달성하려는 열의가 있으며, 끈기와 의지를 가지고 학습 성취에 많은 노력을 기울이게 된다. 이는 수학 학습에 있어서도 마찬가지이다. 그러므로 학습자의 동기는 학습되는 양과 질에 영향을 미치게 되며, 수학 교사들은 동기 유발된 학습자를 원한다. 교사의 말과 행동은 학생들의 목표 달성 의지에 영향을 미치게 되며, 내적 동기가 유발된 학습자는 학습 성취를 위해 더 노력하게 된다. 교사가 학생들의 내적 동기 유발을 위해 취할 수 있는 행동들은 다음과 같다.

- 새롭고 흥미 있는 학습 과제를 제공함으로써 학생들이 호기심을 갖고 고차원의 사고 기술을 사용하도록 장려한다.
- 학생들의 성취를 외적인 요인이 아닌 내적인 요인들로 귀착시키고 스스로의 수학적 능력에 대하여 자신감을 가질 수 있도록 격려한다.
- 학생 각각의 수준에 실현 가능한 목표를 설정하도록 조언한다.
- 학생들의 수학적 성취를 인정하고, 그 결과에 대하여 정직하게 평가한다.
- 학생들의 성취 결과를 내적 동기를 유발할 수 있는 언어를 사용하여 피드백할 뿐만 아니라 학생들이 활용하는 학습 전략을 개선할 수 있도록 그 방법을 제공한다.

사. 지식 위주의 평가보다는 실제 상황에 기초한 평가 방법을 수반하는 수학 수업이어야 한다.

실제 상황에 기초한 평가 방법 중 하나인 수행 평가는 그 목적과 수행 과정, 그리고 평가 결과가 모두 일치하고 있다. 바람직한 평가는 수업에서 다룬 내용에 대하여 평가하고, 평가가 수업과 일관될 뿐만 아니라 의도한 학습 목표와 일치하며, 나아가 수업의 방식과도 일관성을 유지하는 평가이다. 예를 들어 고차원의 분석과 추론 기술을 활용한 수업에서 학습한 것을 선다형 객관식 문항으로 평가하는 것은 수업의 방법과 평가 사이에 일관성이 결여된 경우이다. 교육 개혁의 중요한 한 부분을 차지하고 있는 수행 평가는 실생활 과제와 상황에서 학생들의 수행 능력을 측정하고 반영하는 것이다.

좋은 수학 수업에는 수업에서 기대되는 학습의 본질, 사용된 학습 자료, 일관성을 유지한 다양한 평가 전략들이 포함된다. 수학과 좋은 수업에서의 평가는 학생들에게 기대되는 것과 결과에 대한 명확한 의사 전달이 요구된다. 이때 평가는 수업과 일관성 있게 통합되어 서로에게서 유용한 정보를 얻을 수 있도록 한다. 수업과 평가를 통합하기 위하여 교사들은 다음 사항들을 주목하여야 한다.

- 학생들에게 도전적이고, 학생들의 발달 단계상 적절한 학습 표준을 개발한다.
- 학생들 사이의 개인차를 적절하게 고려한다.
- 학생들의 수학에 대한 이해 발달을 도울 수 있는 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 상호 양립 가능한 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 다양한 방법과 도구를 활용하여, 학생들의 과학적 추론 기술과 과학 개념의 이해에 대하여 체계적으로 자료를 수집한다.
- 학생들이 그들의 지식, 이해 수준 및 기술을 다양한 방법으로 증명할 수 있는 기회를 제공한다.
- 다양한 수준에서 다양한 방법으로 이루어진 평가 결과들을 교수-학습의 개선을 위해 활용한다.

학교 현장에는 학생들의 수준을 고려한 학생 개인 수준에 맞는 학생 중심 교육과정이 구현되어 있는데, 교사뿐만 아니라 교장, 교감 차원에서도 이에 적합한 평가 방법을 생각해 보아야 한다. 모든 실제 상황에 기초한 평가의 시행 및 운영을 교사에게만 맡긴다는 것은 교사에게 지나친 부담이 될 수도 있다.

VII. 수학과 수업 평가

01 수학과 수업 전문성의 의미

학교 교육에서 교사의 역할이 중요해지고 교사의 책무성에 대한 기대가 높아지면서, 세계 여러 나라에서는 우수한 교사를 확보함과 동시에 현직 교사의 전문성 발달을 촉진하고자 각별한 노력을 기울이고 있다. 이러한 상황에서 학생들의 학습을 평가하기 위한 활동과 평가 방법을 고안하고 그 효과를 경험한 교사들은 이러한 수업 전문성 기준의 유용성을 알고 있으며, 교사의 수업 전문성 평가에도 학생 평가와 같은 원리가 적용된다. 수업 전문성 기준에 비추어 교사의 수업 전문성을 평가(즉, 수업 평가)를 하기 위한 방법들이 제시되고 있으며, 이러한 평가의 시도 자체가 교사들의 좋은 수업 실행을 위한 하나의 기준이 될 수 있다.

구체적인 수학과 수업 전문성 기준 개발의 방향은 다음과 같다(임찬빈 외, 2006).

첫째, 수학 교사의 수업 활동을 총망라하는 포괄적인 기준을 제시한다. 다시 말하면 수학과 수업 전문성 기준은 교사의 수학 수업 전-중-후 활동인 수업을 준비하기 위한 과정-실제 수업 실행-수업 후 반성과 평가 · 향후 개선 노력 등을 종합적으로 다룬다.

둘째, 수학과의 모든 내용 영역에 공통적으로 적용할 수 있는 종합적인 기준을 제시한다. 즉, 특정 영역이나 단원에 국한하는 기준보다는 각 영역에 고루 적용할 수 있는 대표적인 기준을 중심으로 제시한다.

셋째, 각 기준 간의 상호 연계를 고려하여 제시한다. 즉, 수업의 흐름을 고려하여 각각의 기준을 독립적인 영역과 요소로 제시하되, 이들 간의 관계가 상호 의존적으로 연계됨을 보여 준다. 수업이란 복합적이고 다면적일 뿐만 아니라 수업의 제 양상은 상호 의존적이다. 이러한 다층적 위계 속에서 수업 평가 기준의 대영역을 설정하고 다시 중영역과 하위 요소로 세분하여 제시한다.

넷째, 목적과 상황에 따라 유연하게 선택할 수 있는 종합적인 기준 목록을 제시한다. 즉, 수학과 수업 평가 기준은 모든 수업에 획일적이고 고정적으로 적용하는 것이 아니라, 목적과 상황에 따라 기준들을 선정, 조합하고 수학과 각 영역의 특성에 따라 그것들을 변용하여 달리 적용할 수 있음을 고려한다.

다섯째, 수업 전문성 기준은 하나의 개별 기준도 다양한 방식으로 접근하여 판단할 수 있음을 전제하여 제시한다. 교사의 전문성과 수업의 양상은 한 가지 측면에서 살피기보다는 다양한 각도에서 접근하고 판단할 필요가 있다. 예전에는 주로 수업 활동에 초점을 맞추어 수업 평가가 이루어졌기에 교실 수업 관찰이 가장 강력한 평가 도구였지만, 수업 전문성은 수업 전-후의 활동을 모두 포함하므로 교실 수업 관찰만으로 기준의 달성 정도를 가늠하기 어렵다. 따라서 특정 기준이 달성된 정도를 판단할 때에는 전문성 기준 영역과 요소별로 다양하게 제시하고, 나아가 각각의 기준도 다양한 방법으로 적용할 수 있음을 전제한다.

여섯째, 수업 전문성 기준은 수업을 위한 장 · 단기적인 계획이나 단원 단위로도 활용할 수 있도록 충분히 고려하여 제시한다. 수업 전문성 기준의 적용은 하나하나의 수업에 국한하지 않으며, 수업 전-중-후를 포괄하여 설정하여야 한다.

요약하면, 수업 전문성 기준은 좋은 수업 활동의 실제를 특징짓는 요소들이라고 규정지을 수 있다. 그러므로 수업 전문성 기준은 (1) 초보 교사를 위한 지침, (2) 숙련된 전문가 교사를 위한 지침, (3) 개선 노력을 집중할 부분을 파악하는 구조, (4) 교사 집단 이외의 다른 공동체들과의 의사소통의 수단으로 사용될 수 있다.

교사의 수업 활동에 대한 전문성 기준이 마련되었을 때, 관계 당사자들은 공유된 개념과 가치 속에서 개선을 위한 노력을 어디에 집중할 것인지에 대한 논의를 할 수 있게 된다. 아울러 수업 전문성 기준에 교직의 임무와 역량, 우수한 교수 활동의 수준을 명확하게 규정해 놓음으로써 타 분야의 사람들로부터 신뢰받을 수 있고, 교직의 위상을 높일 수 있게 된다. 교사들은 교수 활동을 기술하는 공통된 용어의 가치를 익히 알고 있다. 또한 수업 전문성 기준은 교사들에게 '우수성'에 대한 합의된 기준을 제공함으로써 모범적인 교수 활동에 대한 교사들의 대화를 조직하는 역할을 한다. 이러한 대화를 통하여 경력자뿐만 아니라 초보자의 수행 수준을 향상시킬 수 있을 것이다.

한편 수업 전문성 향상을 위한 평가, 즉 수업 평가 기준에서 규정하는 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 주요 내용 학습에 참여할 수 있도록 지원하는 것이다. 수학과 수업 평가 기준의 구성 요소들은 이러한 목적하에 조직되며, 중요한 내용을 학습할 때 교사는 학생들과 함께 학습자 공동체를 조성해 나아가야 할 것이다.

대니얼슨(Danielson, 1996)은 초임 교사와 경력 교사들이 함께 활용할 수 있도록 보완한 수업 평가 기준을 제시하면서 복합적인 교수 활동을 4개 영역(계획과 준비, 교실 환경, 수업, 전문적 책임)으로 구분하였다(임찬빈 외, 2004, 재인용). 이 수업 평가 기준은 교사의 전문성 발달 단계를 파악하여 각 영역에 알맞은 해당 요소들을 제시함으로써 교사로 하여금 전문성을 계발하고 자기 반성에 활용할 수 있도록 하였다.

수업 평가 기준을 개발·실행하는 과정에서 교사는 공동의 연구를 해야 할 뿐만 아니라 평가 기준 개발을 뒷받침하는 원리와 목적에 대한 이론적 근거도 확보하여야 한다. 무엇보다도 수업 평가 기준을 개발하고 설계함에 있어서 주요 이해 당사자들인 교사, 전문가 집단, 정부 기관 등의 참여와 논의가 요구되며, 그에 대한 활용을 전제로 개발하여야 한다. 이때 주의해야 할 것은 교사 자신이 수업 평가 기준을 지원하는 결정적인 역할을 하여야 활용이 가능하게 된다는 점이다.

또한 수업 평가 기준은 자기 평가나 동료 평가, 상호 평가 등으로 활용될 수 있도록 보다 상세하게 개발되어야 하며, 교사의 가르치는 활동에는 일정한 기준이 있다는 점도 제시하여야 한다. 대부분의 교사들은 전문적인 교수 활동의 필수 요소들을 이해하고 있음에도 불구하고, 지극히 관념적인 수준에서 표현하는 경우가 흔히 있는데, 이 점을 특히 주의해야 한다. 동료 교사들뿐만 아니라, 학생, 학부모 및 사회의 다른 구성원들이 교사에게 요구하는 지식과 역량을 명시하는 수업 평가 기준은 좋은 교수 활동을 파악하고 알리며 보상할 수 있는 수단이 되기도 한다.

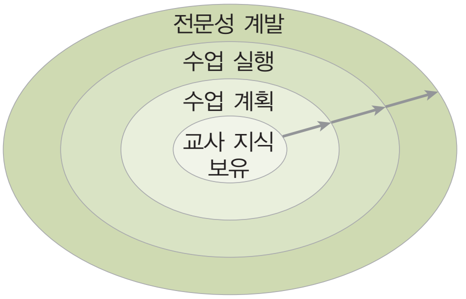
02 수학과 수업 영역 및 요소

가. 수업 평가 영역

수업 평가는 수업 전, 수업 중, 수업 후의 단계별로 진행할 수 있으며, 이러한 수업 단계는 '지식 보유', '수업 계획', '수업 실행', '수업 반성' 부문으로 구성되는데, 이는 교사가 좋은 수업을 하기 위해서는 다음과 같은 요건을 갖추어야 하기 때문이다.

- 교사가 알아야 할 것 ⇨ 지식 보유
- 교사가 준비해야 할 것 ⇨ 수업 계획
- 교사가 행해야 할 것 ⇨ 수업 실행
- 교사가 전문성 발달을 위해 해야 할 것 ⇨ 수업 반성

아는 것이 바로 수업의 실행으로 옮겨지는 것만은 아니지만, 일반적으로 교사가 계획을 세우고 준비하는 것은 수업에 영향을 주고, 이러한 모든 것은 실시한 수업에 대한 교사의 반성적 실천의 영향을 받게 된다. 이렇듯 [지식 보유] ⇨ [수업 계획] ⇨ [수업 실행] ⇨ [수업 반성]의 연계성이 있음을 나타내고 있다. [그림 Ⅶ-1] 참조



[그림 Ⅶ-1] 교사의 수업 단계

위의 [그림 Ⅶ-1]에서 알 수 있는 바와 같이, 교사의 '지식 보유'는 교사가 갖추고 있는 지식에 관한 이해 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 계획'은 본인이 준비한 수업 계획 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 실행'은 본인이 계획한 대로 수업을 충실히 실행하였다고 생각하는가, 그리고 '수업 반성'은 본인의 수업 실행 결과에 만족하는가 등을 반영하기 위한 것이다.

수업 평가를 위한 세부 영역 및 이에 관한 설명은 다음 〈표 Ⅶ-1〉과 같다.

〈표 Ⅶ-1〉 수업 평가 영역

수업 평가 영역		수업 평가 영역에 관한 설명	비고(수업 평가 요소)
교과 내용	• 교육과정 이해 및 재구성	교육과정 목표 및 내용에 관하여 정확히 이해하고, 이를 적절히 재구성하여 수업에 반영하는 것	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기
	• 수학 내용	소양이 되는 학교 수학 및 학문 수학에 관하여 충분히 이해하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기
	• 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 충분히 이해하고, 이를 효과적으로 수업에 반영하는 것	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기
	• 수학적 가치	수학적 가치와 중요성을 충분히 인식하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기
학습자 이해	• 학습자 수준	학습자의 인지 수준, 선행 지식, 학업 성취 수준 등을 파악하고 이를 적절히 수업 시간에 반영하는 것	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기
	• 학습자 오개념	학습자의 오개념을 인지하고 이에 대처하는 것	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기
	• 학습 동기	학습자의 관심 및 흥미도를 파악하고 이를 고취시키는 것	학습자 수준이 반영된 적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기
	• 수학적 태도	학습자의 자신감, 신념 등을 파악하고, 이를 증진시키는 것	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기
	• 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 파악하고, 이를 수업에 반영하는 것	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기
교수 학습 방법 및 평가	• 수업 목표 및 내용 반영	교육 목표 및 내용을 파악하고 이에 적합한 교수 학습 방법을 수행하는 것	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결과 관련된 전반적인 활동을 인지하고 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기
	• 학습자 수준 및 태도 반영	학습자의 인지 수준 및 정의적 특성을 인지하고, 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통에 관해 인지하고, 이를 적절히 활용하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 평가 방법 및 절차 마련	수업 목표, 학습자 수준, 평가 목적 등에 따른 평가 방법 및 절차를 계획하고 마련하는 것	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기
	• 평가 도구 개발	학습 목표에 따른 평가 목표, 문항, 기준 선정 및 실행에 관하여 인지하고 이를 수행하는 것	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기
	• 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치를 위한 피드백 계획 및 실행을 교사가 인지하고 수행하는 것	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기
수업 상황	• 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료 등을 파악하고, 이를 준비하여 수업에 활용하는 것	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기
	• 교실 환경 및 수업 집단 조성	여러 도구 및 교구, 자료의 효율적인 활용성을 이해하고, 이에 맞춰 수업 환경 및 집단을 구성하는 것	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기
	• 학습 태도 및 수업 분위기 조성	교사가 해당 수업 내용에 관한 학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기를 인지하고, 이를 유도하는 것	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기
	• 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 또는 질문 등을 인지하고, 이를 효율적으로 대처하는 것	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기

나. 수업 평가 요소

수업 평가 영역에 따른 수업 평가 요소는 다음 〈표 Ⅶ-2〉와 같이 평정척도법을 이용하여 평정척도를 3단계 정도로 두는 것이 적당하며, 경우에 따라서는 5단계로 좀 더 세분화하여 사용하도록 한다.

수업 평가 요소를 수업 전(지식 보유 및 수업 계획), 수업 중(수업 실행), 수업 후(수업 반성)의 상황으로 세분화하여 제시하면 다음과 같다.

〈표 Ⅶ-2〉 수학 수업 평가 요소

수업 평가 영역		수업 평가 요소		평정척도		
				그렇다	보통이다	그렇지 못하다
교과 내용	1. 교육과정 이해 및 재구성	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 수학 내용	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 가치	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
학습자 이해	1. 학습자 수준	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 학습자 오개념	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 동기	적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 태도	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

교수 학습 방법 및 평가	1. 수업 목표 및 내용 반영	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습자 수준 및 태도 반영	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 평가 방법 및 절차 마련	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	6. 평가 도구 개발	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	7. 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
수업 상황	1. 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 교실 환경 및 수업 집단 조성	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 태도 및 수업 분위기 조성	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

따라서 이 수업 평가 틀은 교사가 자신의 수업 계획 및 진행, 그리고 반성을 통해 수업 개선은 물론, 더 나아가 교사 지식의 확장을 이끌 수 있도록 하는 데 도움을 줄 것이다. 이때 가급적 수업 후 즉각적으로 평가를 실시함으로써 자신의 수업 반성을 통하여 보다 수월하게 수업 개선이 이뤄질 수 있도록 한다. 또 학교 환경 및 수업 상황에 따라 동료 교사들과의 협력, 연구, 논의 등을 통하여 지속적으로 수업 개선을 도모하는 의지와 노력을 갖추도록 한다.

결론적으로 수업 평가 요소는 기본적으로 교사들이 어떤 지식을 보유하고, 그 지식을 토대로 수업을 계획하고 그 계획에 따라 수업을 실행하며, 더 나아가 반성 및 개선 여부에 활용되어야 한다. 만약 한 교사가 교과 내용, 학습자 이해, 교수 학습 방법 및 평가, 수업 상황 등에 관한 지식을 보유한다면, 수업 계획이나 수업 실행에서 교사의 보유된 지식이 고루 반영되어 드러나야 하며, 수업 반성의 측면도 마찬가지이다. 하지만 어떤 교사에 대해 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 부문을 동시에 판단하기는 무리이다. 일반적으로 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성의 네 부문 중에서 가장 진단하기에 용이하고 필요한 부문은 수업 실행 부문일 것이며, 또한 간편한 수업 평가를 위해서는 수업 실행 부문에 초점을 두어 교사 스스로 자기 평가를 수행하는 것이 좋다.

한마디로 교사가 자신이 수학 및 수학 교육 관련 지식을 어느 정도 보유하고 있는가에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 이 부문만을 스스로 점검하도록 한다. 마찬가지로 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 측면에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 해당 부문만을 선택하여 점검하도록 한다. 여기서 수업 계획과 수업 반성 측면의 평가 요소는 교사 자신의 교사 지식 및 전문성 향상을 위한 '자기 평가' 용으로 활용 가능하다. 한편 수업 실행 측면의 평가 요소는 교사 자신은 물론 동료 교사의 판단에 따라 진단 및 평가가 가능하다. 이때 평가 요소의 활용 단위(즉, 얼마만큼 수업을 진행한 후 평가를 할 것인가)는 교사의 수업 여건이나 상황에 따라 결정하도록 한다.

VIII. 교과서의 구성

01 편찬 방향

이 교과서는 새로 개정된 교육과정에 따라 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 문제 해결력을 기를 수 있도록 하였다.

둘째, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 하여 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해하도록 하였다.

셋째, 자신의 생각을 표현하고 토론하며, 다양한 방법으로 수학적 내용을 다른 사람에게 설명할 수 있는 의사소통 능력을 기를 수 있도록 하였다.

넷째, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

02 구성과 특징

■ 대단원 도입

단원과 관련된 사진을 제시하고, 사회 현상이나 자연 현상에서 관찰할 수 있거나 적용할 수 있는 이 단원의 수학 내용을 소개함으로써 단원 학습의 의미와 흥미를 불어넣어 주도록 하였다.

■ 준비 학습

각 대단원을 공부하는 데 꼭 필요한 선수 학습 요소와 이에 대한 문제를 제시함으로써 학습에 필요한 선행 지식을 상기하고 학습의 위계를 알 수 있도록 하였다.

■ 중단원 도입

실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.

■ 생각 열기

새로운 내용의 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 소개하여 학생들에게 학습에 대한 흥미를 불러일으키고 내용 전개의 실마리를 제공하였다. 또한 이를 통하여 수학의 가치와 유용성도 느끼고 창의적인 생각을 키울 수 있도록 스토리텔링 형식을 빌렸다.

■ 탐구 활동

창의력 기르기와 관련된 물음이나 수학적 사고를 유발할 수 있는 물음과 활동을 통하여 새로 도입할 수학의 원리나 개념을 탐구할 수 있도록 하였다.

■ 예제

학습 내용과 관련된 대표적인 문제와 그 풀이 과정을 함께 제시함으로써 학생들의 개념 이해를 더욱 탄탄히 하고 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

■ 문제, 발전 문제, 실생활 문제

학습한 내용을 확인하는 기본 문제를 제시함으로써 학생들이 공부한 내용을 바르게 이해하였는지 스스로 점검할 수 있도록 하였다.

■ 창의 UP

생활 주변에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 원리와 법칙을 탐구하고, 수학의 개념을 깊이 생각해 보고 표현할 수 있게 하여 창의적인 생각을 기를 수 있도록 하였다.

■ 사고력 기르기(문제 해결, 추론, 의사소통)

여러 가지 문제를 창의적으로 해결하는 능력을 기르기 위해 생활 주변의 문제 상황을 탐색하고 해결하는 문제를 제시하였다. 또 수학적 사실을 분석하고 정당화하는 문제를 통하여 수학적으로 사고하고 추론하는 능력을 향상시킬 수 있도록 하였다. 더불어 수학적 개념을 말로 표현하고 토론해 보게 함으로써 다른 사람과 효율적으로 의사소통하는 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 단원 과제

중단원 도입과 관련된 구체적 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.

■ 중단원 기초, 기본, 실력

중단원에서 학습한 내용에 대한 문제를 세 가지 수준으로 나누어 제시하였다. 기초에서는 중단원 학습 내용 중 최소 필수 내용을 확인하는 문제를 제공, 기본에서는 중단원 학습 내용 중 기본 개념을 확인하는 문제를 제공, 실력에서는 중단원 학습 내용을 완벽히 이해한 학생들의 수월성 교육에 이용하여 수준별 학습에 도움이 될 수 있도록 하였다.

■ 수행 과제

대단원에서 학습한 내용 중 탐구 소재를 선정하여 실험 또는 분석을 하거나 조사나 관찰을 하여 그 결과를 조직하고 표현함으로써 종합적인 문제 해결 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 대단원 학습 내용 정리

대단원 학습을 마친 후 이 단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하고, 새로 배운 용어와 기호를 제시함으로써 학습 내용을 스스로 점검하고 보완할 수 있도록 하였다.

■ 대단원 평가 문제

대단원 학습을 종합적으로 평가하기 위하여 다양한 유형의 평가 문항들을 제시하였다. 또 마지막 두 문제는 서술형으로 제시하여 수학적 표현 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 공학적 도구(컴퓨터, 계산기)의 활용

단원의 내용 중에서 공학적 도구를 의미 있게 활용할 수 있는 학습 주제를 선정하여 인터넷, 컴퓨터, 계산기 등을 활용하는 방법을 제시함으로써 학습자의 흥미를 높이고, 효과적인 수업이 될 수 있도록 하였다.

■ 수학 플러스

단원의 끝에 이 단원의 수학 원리와 관련된 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 수학에 흥미를 불러일으키고, 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.

IX. 연간 지도 계획안

단원	중단원	차시	교과서 쪽수	지도 내용
Ⅰ. 순열과 조합	1. 순열과 조합	1～18	10～37	01 경우의 수 02 순열 03 조합 수준별 학습
	2. 분할과 이항정리	19～26	38～51	01 분할 02 이항정리 수준별 학습
	단원 마무리	27～28	52～59	
Ⅱ. 확률	1. 확률의 뜻과 활용	29～40	60～79	01 확률의 뜻 02 확률의 기본 성질 수준별 학습
	2. 조건부확률	41～48	80～93	01 조건부확률 02 사건의 독립과 종속 수준별 학습
	단원 마무리	49～50	94～99	
Ⅲ. 통계	1. 확률분포	51～72	100～133	01 확률변수와 확률분포 02 이항분포 03 정규분포 수준별 학습
	2. 통계적 추정	73～83	134～151	01 모집단과 표본 02 모평균의 추정 03 모비율의 추정 수준별 학습
	단원 마무리	84～85	152～159	

※ 위 계획안은 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도 등에 따라 적절히 조정하여 운영할 수 있다.

X. 참고 문헌

- 강완, 백석윤(1998). 초등수학 교육론. 동명사.
- 교육과학기술부(2007). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2007-79호 별책 8).
- 교육과학기술부(2009). 2009 개정 교육과정 총론. 교육과학기술부 고시 제 2009-41호.
- 교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 별책 8).
- 신이섭 외(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단 정책연구 2011-11.
- 이홍우(1999). 지식의 구조와 교과. 서울: 교육과학사.
- 임찬빈, 이화진, 곽영순, 강대현, 박영석(2004). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅰ): 일반 기준 및 교과(사회, 과학, 영어) 기준 개발. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2004-5.
- 임찬빈, 이화진, 최승현, 오은순, 이경언, 이수정, 노은희, 권순달(2006). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅲ): 일반 기준 및 교과(국어, 수학, 기술·가정, 음악, 초등) 기준 상세화. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2006-3.
- 조지민, 김명화, 최인봉, 송미영, 김수진(2007). 2006년 국가수준 학업성취도 평가 연구: 수학. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRE 2007-3-4.
- 박선화, 김명화, 주미경(2010). 수학에 대한 정의적 특성 향상 방안 연구. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRI 2010-9.
- 박순경(2010). 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정의 개선 방향 탐색. 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정 개선 방향 23-72. 국가교육과학기술자문위원회 교육과정위원회.
- 최승현(2002). 수학과 교육 내실화 방안 연구－좋은 수업 사례에 대한 질적 접근－. 한국교육과정평가원.
- 최승현, 황혜정(2007). 수학 수업 평가 기준 개발에 관한 기초 연구, 학교 수학, 9(3), pp.327～352.
- 황혜정, 김홍원, 박경미, 김수환, 김신영, 채선희(1997). 창의력 신장을 돕는 중학교 수학과 학습 평가 방법 연구. 한국교육개발원 연구 보고 CR 97-10-1.
- 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2012). 수학교육학신론(2012 증보판). 문음사.
- 황혜정(2012). 수학 수업에서 요구되는 교사 지식에 대한 평가 기준 재탐색. 한국학교수학교육학회 시리즈 E 수학교육논문집, 26(1), pp.29～55.
- Charles, L., Lester, F., & O'Daffer, P.(1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc..
- Danielson Charlotte(1997). *A collection of Performance Tasks and Rubrics*: Middle School Mathematics. Larchmont, NY: Eye O Education, Inc..
- Driver, R., Asoko, H., Leach, J. Mortimer, E. & Scott, P.(1994). *Constructing scientific knowledge in the classroom*. Educational Researcher, 23, (7), 5-12.
- Greeno, J. G.(1978). *Nature of Problem Solving Abilities*, In W. K. Estes(Ed.). *Handbook of learning and cognitive process: Human Information Processing*(pp.239～270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krulick, S. & Rudnick, J. A.(1984). *A Sourcebook for Teaching Problem Solving*. Boston: Allyn and Bacon.
- National Council of Teachers of Mathematics(1989). *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematics Assessment*, In J. K. Stenmark(Ed.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*, In Frank Swetz and J. S. Hartzler(Eds.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M.(1989). *Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula*, In W. Blum et. al.(Eds.), *Application and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*(pp. 22～31). West Sussex: Ells Horwood Limited.
- Pólya, G.(1957), *How to Solve it*. 2nd ed., New York: Doubleday & Company, Inc..
- Vosniadou, S.(2001). *How children learn. Educational Practices series*. Monograph No. 7. International Bureau of Education(IBE).

각론

우리의 일상생활에서는 매 순간에도
다양한 경우의 수가 존재한다.

순열과 조합

준비학습

중② 경우의 수

1 한 개의 주사위를 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 홀수의 눈이 나오는 경우의 수 3

(2) 4의 배수의 눈이 나오는 경우의 수 1

(3) 2보다 큰 수의 눈이 나오는 경우의 수 4

(4) 소수의 눈이 나오는 경우의 수 3

초등 가르기와 모으기

2 $a+b=10$이 되는 자연수의 순서쌍 (a, b)를 구하여라. (단, $a \geq b$)

$(9, 1), (8, 2), (7, 3), (6, 4), (5, 5)$

단원의 지도 목표

1. 순열과 조합

① 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.
② 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있게 한다.
③ 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있게 한다.
④ 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있게 한다.
⑤ 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

2. 분할과 이항정리

① 유한집합을 서로소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있게 한다.
② 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있게 한다.
③ 이항정리를 이해하게 한다.
④ 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통해 직접 나열해 보거나 수형도를 그려 보는 등의 활동을 통해 그 의미를 이해하고 설명해 보게 한다.
② 경우의 수, 순열, 조합, 분할을 이용하여 실생활 문제를 해결해 봄으로써 그 유용성을 인식하게 한다.
③ 염주순열, 같은 것이 있는 원순열은 다루지 않는다.
④ 분할의 수를 구하는 식은 예를 통하여 이해하고 설명해 보게 한다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[중1~3학년군] 경우의 수와 확률 [수학Ⅱ] 집합	1. 순열과 조합 경우의 수 순열 조합 2. 분할과 이항정리 분할 이항정리	[확률과 통계] 확률의 뜻과 활용 조건부확률

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	10~11	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 순열과 조합	**중단원 도입**		12	• 염기의 배열	
	01 경우의 수		13~17	• 합의 법칙 • 곱의 법칙	합의 법칙 곱의 법칙
	02 순열	4~11	18~27	• 순열 • 원순열 • 중복순열 • 같은 것이 있는 순열	순열 계승 원순열 중복순열 ${}_n\mathrm{P}_r$, $n!$, ${}_n\Pi_r$
	03 조합	12~17	28~34	• 조합 • 중복조합	조합 중복조합 ${}_n\mathrm{C}_r$, ${}_n\mathrm{H}_r$
	수준별 학습	18	35~37	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 분할과 이항정리	**중단원 도입**	19~22	38	• 사탕을 나누어 담아 보자.	
	01 분할		39~45	• 집합의 분할 • 자연수의 분할	집합의 분할 자연수의 분할 $S(n, k)$, $P(n, k)$
	02 이항정리	23~25	46~48	• 이항정리	이항정리 이항계수 파스칼의 삼각형
	수준별 학습	26	49~51	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		27~28	52~59	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 순열과 조합의 역사

오늘날 우리가 배우고 있는 수학의 기원은 대부분이 서양에서 비롯되었는데, 순열과 조합은 동양에서 그 기원을 찾을 수 있다. 순열에 대한 오래된 기록은 중국과 인도에서 발견되었다. 중국에서는 우주와 인간의 삶의 다양함을 설명하기 위하여 두 개의 효(—, --)를 배열하여 8괘와 64괘를 만들었는데, 두 개의 효의 다양한 배열은 역(易)의 기본 구조가 되었다. 특히 배열에 관하여 흥미를 돋우는 소재인 마방진에 관한 기록은 1세기경 중국의 기록에서 찾아볼 수 있다고 한다.

인도에서는 6세기경에 브라마굽타(Brahmagupta ; 598～?665)가 n개의 원소를 가지는 집합의 원소를 재배열하는 순열의 수가 $n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$이라는 것을 알고 있었다. 그로부터 약 500년 후인 1150년경에 바스카라(Bhaskara, A. ; 1114～1185(1193?))는 n개의 원소를 가지는 집합에서 k개의 원소를 가지는 부분집합을 만들 수 있는 경우의 수가

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots2\cdot1}$$

이라는 것을 알고 있었던 것으로 여겨진다. 그는 예술, 건축, 음악, 의학 등에서 순열의 개념을 발견하기 위해 노력하였던 것으로 알려져 있다.

한편 고대 그리스나 로마 시대에는 순열을 본격적으로 다루지 않은 것으로 추측된다. 다만 보이티우스(Boethius A. M. S ; ?480～524)가 n개의 사건들 중에서 2개를 조합하는 경우의 수가 $\frac{n(n-1)}{2}$이 된다는 것을 언급했을 뿐이다.

중세 시대에 아라비아 인들과 유대 인들은 수학과 천문학에 대하여 많이 연구했다. 예를 들어 랍비 벤 에즈라(Ben Ezra, 1140년경)는 태양계의 행성들이 한 줄로 합쳐지는 배열에 대하여 연구하였고, 토성이 다른 행성들과 가질 수 있는 위치 관계의 경우의 수를 찾으려고 노력했다. 특히 벤은 서로 다른 7개 중에서 2개를 택하는 조합의 수가 서로 다른 7개 중에서 5개를 택하는 조합의 수와 같다는 것을 알고 있었다. 즉, 조합의 성질인 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$를 알고 있었던 것이다. 그러나 그는 이런 내용들을 발표하지는 않았다.

거슨(Gerson, L. B.)은 1321년에 "Maassei Choscheb"라는 책에서 서로 다른 n개 중에서 r개를 택하는 순열의 수와 조합의 수에 대한 일반적인 원리를 설명했다. 그로부터 몇 년 후 오렘(Oresme, N. ; ?1320～1382)은 서로 다른 6개 중에서 1개, 2개, 3개, 4개, 5개를 택하는 조합의 수들의 합, 즉 ${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5$를 계산하였으며 구체적으로 조합의 수를 ${}_6C_2=15$, ${}_6C_3=20$으로 계산하였다.

순열과 조합에 대한 보다 체계적인 연구는 1494년 파촐리(Pacioli, L. ; 1445～1517)가 지은 "Summa de Arithmetica"에서 찾아볼 수 있다. 이 책에서 파촐리는 몇 명의 사람들이 탁자에 앉는 경우의 수를 구하는 방법을 설명했다.

또 1523년 이탈리아의 수학자인 타르탈리아(Tartaglia, N. F. ; 1499～1557)는 주사위를 던지는 경우에 순열과 조합의 이론을 처음으로 적용하였고, 1540년 영국에서는 버클리(Buckley, W.)가 n개 중에서 r개를 택하는 조합의 특별한 경우를 예로 들었다.

16세기의 랍비 모세스 코르도베로(Moses Cordovero ; 1522～1570)는 "Pardes Rimmonim"을 저술하였는데, 여기서 그는 순열과 조합에 대한 흥미로운 사례와 몇 가지 일반적인 내용을 언급하고 있다. 비슷한 시기에 부테오(Buteo)는 4개의 주사위를 던질 때 일어날 수 있는 경우의 수와 오늘날 번호 열쇠와 원통형 열쇠 번호의 가능한 조합의 수를 예로 들었다.

오늘날과 같은 조합의 수

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

을 일반적인 방법으로 기술한 사람은 1634년 프랑스의 수학자인 해리건(Hérigone, P. ; 1580～1643)이다.

2. 파스칼의 삼각형


파스칼

파스칼(Pascal, B. ; 1623～1662)은 '파스칼의 삼각형'이라고 불리는 이항계수의 배열에서 이항계수와 조합 사이의 관계를 보여 주었는데, 이러한 관계는 페르마(Fermat, P. ; 1601～1665)를 비롯하여 당시 다른 수학자들도 관심을 갖고 있었던 문제이다.

'파스칼의 삼각형'으로 알려진 "수 삼각형론"은 1653년에 저술되었지만 출판하지는 않았다. 파스칼은 산술 삼각형을 다음 그림과 같이 구성하였다.

1	1	1	1	1	1	⋯
1	2	3	4	5	6	⋯
1	3	6	10	15	21	⋯
1	4	10	20	35	56	⋯
1	5	15	35	70	126	⋯
1	6	21	56	126	252	⋯

여기서 둘째 또는 그 이후의 행에 나타나는 임의의 성분은, 그 성분 바로 위에 있는 성분부터 그 행의 왼쪽 끝까지의 성분들을 더한 값과 같다.

또 위의 그림에서와 같이 대각선을 따라서 놓여 있는 수들은 이항 전개식에서 나타나는 연속적인 계수임을 알 수 있다.

베르누이(Bernoulli, J. ; 1654～1705)는 순열과 조합에 대하여 많은 업적을 남겼다.


베르누이

자신의 저서인 "추론 예술(Ars Conjectandi)"에서 조합에 대한 중요한 정리를 언급하고 있으며 'Permutation'이라는 용어를 처음으로 사용하였다. 이 개념은 라이프니츠(Leibniz, G.W. ; 1646～1716)와 월리스(Wallis, J. ; 1616～1703)도 생각했던 것으로 서로 다른 용어를 사용하였다.

'Combination'이라는 용어를 오늘날 조합의 의미로 사용한 사람은 파스칼과 월리스이다. 반면 라이프니츠는 조합의 일반적인 의미로는 'complexiones'를 사용했고, 2개의 원소로 된 집합에 대해서는 'combinationes'를, 3개의 원소로 된 집합에 대해서는 'conternationes'를 사용했다.

오일러(Euler, L. ; 1707～1783)는 쾨니히스베르크의 다리 문제를 풀면서 그래프 이론을 시작하게 되었으며 드무아브르(de Moivre, A. ; 1667～1754)는 포함 · 배제의 원리를 개발하였다.

이들을 선구자로 하여 많은 수학자들이 다양한 문제들을 연구하고 그에 따른 이론을 개발해 나갔고, 20세기 말에 이르러서 순열과 조합은 조합론으로 발전하며 현대 수학의 커다란 한 분야가 되었다. 오늘날 조합론은 컴퓨터 과학의 이론적 바탕을 제공하고 게임 이론 등의 새로운 응용 분야를 개척하며 발전을 거듭하고 있다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

<table>
<tr><td colspan="2">대단원</td><td>Ⅰ. 순열과 조합</td><td>쪽수</td><td>교과서 10~15쪽</td></tr>
<tr><td colspan="2">소단원</td><td>1. 순열과 조합　01 경우의 수</td><td>차시</td><td>1/28</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td colspan="3">합의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>학습 과정</td><td colspan="2">교수 · 학습 활동</td><td>교수 · 학습상의 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>선수 학습 확인

동기 유발

학습 목표 제시</td><td colspan="2">◎ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다.
◎ 중단원 도입 글을 읽고 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다.
◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다.
• 합의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.</td><td>모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.</td></tr>
<tr><td>전개</td><td>탐구 활동

개념 학습

문제 해결</td><td colspan="2">◎ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다.
◎ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다.
◎ 학습 내용 설명
합의 법칙
두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는
$$m+n$$
합의 법칙 – 집합으로의 표현
두 사건 A, B가 일어나는 경우의 집합을 각각 A, B라 하면, 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수는 각각 $n(A)$, $n(B)$와 같다
두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$
이다.
◎ 예제 01을 설명한다.
◎ 문제 1, 2번을 풀게 한다.
정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.</td><td>합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통해 직접 나열해 보거나 수형도를 그려 보는 등의 활동을 통해 그 의미를 이해하고 설명해 보게 한다.
합의 법칙은 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때 이용하는 것임을 유의하게 한다.</td></tr>
<tr><td>정리</td><td>학습 내용 정리
차시 예고</td><td colspan="2">◎ 본시의 학습 내용을 정리한다.
◎ 다음 차시를 예고한다.
• 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.</td><td></td></tr>
</table>

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅰ. 순열과 조합	쪽수	교과서 15~16쪽
소단원	1. 순열과 조합 01 경우의 수	차시	2/28
학습 목표	**곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.**		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	**선수 학습 확인** **동기 유발** **학습 목표 제시**	◯ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◯ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 집에서 공원까지 가는 방법이 2가지, 공원에서 학교까지 가는 방법이 3가지일 때, 집에서 공원을 거쳐 학교까지 가는 방법의 수를 말하여 보자. ◯ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	**탐구 활동** **개념 학습** **문제 해결**	◯ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ◯ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◯ 학습 내용 설명 **곱의 법칙** 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$ **곱의 법칙 – 집합으로의 표현** 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $n(A) \times n(B)$ 이다. ◯ 문제 3, 4번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	곱의 법칙은 두 사건 A, B가 동시에 일어날 때 이용하는 것임을 유의하게 한다.
정리	**학습 내용 정리** **차시 예고**	◯ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◯ 다음 차시를 예고한다. • 곱의 법칙을 활용하여 자연수의 약수의 개수를 구할 수 있다.	

1 순열과 조합

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.
② 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있게 한다.
③ 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있게 한다.
④ 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있게 한다.
⑤ 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 경우의 수	합의 법칙
	곱의 법칙
02 순열	순열
	원순열
	중복순열
	같은 것이 있는 순열
03 조합	조합
	중복조합
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 12 쪽

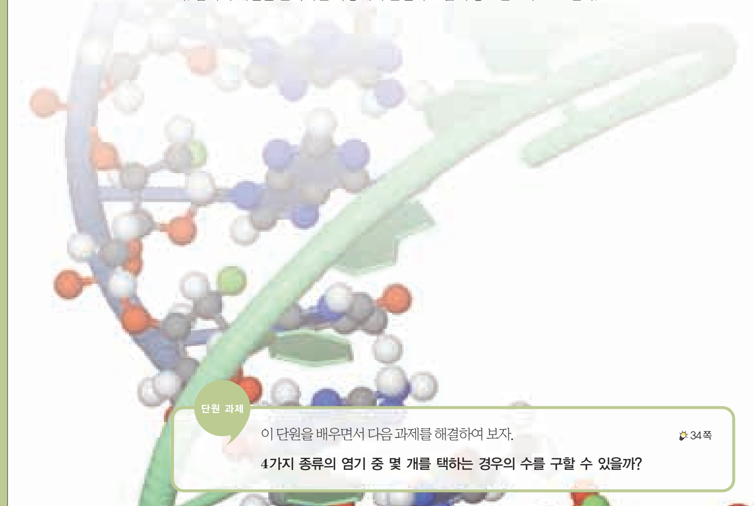
1 순열과 조합

염기의 배열

DNA(Deoxyribonucleic acid)는 유전자의 기본 구성 요소로 아데닌(A), 구아닌(G), 사이토신(C), 티민(T)의 네 가지 염기가 2중 나선 구조로 이루어져 있는 물질이다. DNA를 구성하고 있는 이 염기들의 배열에 따라 유전 정보가 정해지는데, 그 염기 배열에 따라 각 개체가 합성하는 단백질의 아미노산 순서와 배열이 결정된다.

이때 RNA(Ribonucleic acid)는 DNA로부터 유전 정보를 받아 단백질을 합성하는 역할을 한다. RNA를 구성하는 염기들은 티민(T)이 우라실(U)로 대체되는 것을 제외하고는 DNA를 구성하는 염기와 같다.

이와 같은 염기의 배열을 분석하는 것은 유전적 요소를 연구하는 유전 공학에서 매우 중요한 일이다. 염기의 배열을 분석하는 과정에서 순열과 조합이 중요한 도구로 쓰인다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 34쪽

4가지 종류의 염기 중 몇 개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있을까?

들어가면서 유한개의 대상을 서로 다르게 배열하는 방법은 특정 조건에서 가능한 경우의 수, 조합의 수에 대한 추론과 최적화를 핵심 내용으로 한다. 예를 들어 순열과 조합은 염기 서열을 분석하여 유전적 요소를 연구하는 유전 공학, 여섯 개의 점을 이용하여 시각장애인의 의사소통을 위해 고안된 점자, 기업의 경영 혁신을 위한 구조 분석 및 인력 재배치, 다양한 분위기를 연출하기 위한 패션의 코디 등의 문제를 해결하는 데 매우 중요한 도구가 된다.

이 단원에서는 순열과 조합을 이용하여 확률의 기초가 되는 경우의 수를 빠짐없이 중복되지 않게 보다 합리적으로 구할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준	성취 수준	
1. 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.	상	합의 법칙과 곱의 법칙을 적절히 활용하여 경우의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
	하	직접 경우를 나열할 수 있거나 수형도를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
2. 순열, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.	상	순열, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	순열, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열의 뜻을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
	하	순열, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열의 뜻을 말할 수 있고, ${}_nP_r$, $(n-1)!$, ${}_n\Pi_r$의 n과 r, $\dfrac{n!}{p!q!\cdots s!}$

교과서 13 쪽

01 경우의 수

● 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

합의 법칙이란 무엇인가?

생각 열기 **자동차 산업**

우리나라에 처음 들어온 자동차는 1903년 고종의 4기통짜리 캐딜락이었는데, 이 당시 자동차는 고가의 사치품으로서 부의 상징이었다. 그러나 자동차가 대중화되면서, 자동차는 생활의 편익을 가져다주는 소비재로서뿐만 아니라 구매자 개인의 개성과 욕구를 충족시켜 주는 개성화 상품으로 그 개념이 바뀌었다.

일반적으로 개인이 사용하는 자동차는 엔진 배기량에 따라 경차, 소형차, 중형차, 대형차로 나눌 수 있다.

탐구 활동 **어느 자동차 전시장에는 경차 5종류, 소형차 3종류, 중형차 2종류가 전시되어 있다. 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 전시된 경차 또는 소형차 중에서 한 대를 택하는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 전시된 소형차 또는 중형차 중에서 한 대를 택하는 경우의 수를 구하여 보자.
3. 전시된 경차가 m대, 소형차가 n대일 때, 경차 또는 소형차 중에서 한 대를 택하는 경우의 수는 어떻게 구할 수 있는지 말하여 보자.

경차가 A, B, C, D, E의 5종류, 소형차가 a, b, c의 3종류일 때 경차 또는 소형차 중에서 한 대를 택하는 경우를 생각하여 보자.

경차를 택하는 경우의 수는 A, B, C, D, E이므로 5

소형차를 택하는 경우의 수는 a, b, c이므로 3

이다. 이들 두 가지의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 경차 또는 소형차를 택하는 경우의 수는

$$5+3=8$$

이다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통해 직접 나열해 보거나 수형도를 그려 보는 등의 활동을 통해 그 의미를 이해하고 설명해 보게 한다.

2. 집합의 개념을 이용하여 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하게 한다.

3. 어떤 사건을 시행하였을 때 두 사건 A, B가 동시에 일어날 수 있는 경우와 동시에 일어날 수 없는 경우, 즉 $A\cap B\neq\varnothing$인 경우와 $A\cap B=\varnothing$인 경우일 때를 구분하여 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수를 구하는 방법을 알게 한다.

4. 합의 법칙과 곱의 법칙은 세 가지 이상의 사건에 대해서도 성립한다는 것을 이해할 수 있도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

• 합의 법칙(addition principle)
• 곱의 법칙(multiplication principle)

성취 기준		성취 수준
		(단, $p+q+\cdots+s=n$)의 p, q, $\cdots$, s를 쉽게 적용하여 해결할 수 있는 상황에서 그 순열의 수를 구할 수 있다.
3. 조합, 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.	상	조합, 중복조합의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	조합, 중복조합의 뜻을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.
	하	조합, 중복조합의 뜻을 말할 수 있고, ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$, ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$의 n과 r를 쉽게 적용하여 해결할 수 있는 상황에서 그 조합의 수를 구할 수 있다.

01 경우의 수

소단원 지도 목표

① 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하게 한다.
② 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

생각 열기 참/고/자/료

역사상 처음으로 기계의 힘에 의하여 주행한 차는 1770년 프랑스의 퀴뇨(Cugnot, N. J.)가 제작한 증기자동차이다. 이 증기자동차는 앞바퀴가 한 개인 삼륜차로, 중량이 크고 보일러의 용량이 작아 그 속도가 겨우 사람이 걷는 정도인 시속 5 km이었다고 한다.
이 밖의 자동차의 역사, 상식 등의 보다 자세한 정보는 교통박물관 홈페이지(http://www.stm.or.kr)에서 찾아볼 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 전시된 자동차 중에서 한 대를 택하는 경우의 수를 구하는 과정을 통해 합의 법칙을 이해하게 하려는 것이다.

1. 8 **2.** 5

3. 두 경우의 수의 합 $m+n$으로 구할 수 있다.

교과서 14 쪽

일반적으로 경우의 수에 대하여 다음과 같은 **합의 법칙**이 성립한다.

반복할 수 있는 실험이나 관찰에 의하여 일어나는 결과를 사건이라고 한다.

합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$$m+n$$

참고 세 개 이상의 사건에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으면 합의 법칙이 성립한다.

문제 1 3종류의 과일과 4종류의 쿠키가 있다. 이때 한 가지를 골라 먹을 수 있는 경우의 수를 구하여라.

이제 집합의 개념을 이용하여 합의 법칙을 생각하여 보자.

❶ 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 집합을 각각 A, B라 하면, 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수는 각각 $n(A)$, $n(B)$와 같다. 이때 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 집합은 $A\cup B$이고, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 집합은 $A\cap B$로 나타낼 수 있으므로 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

이다. 한편 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때에는 $A\cap B=\varnothing$이므로 $n(A\cap B)=0$이다. 따라서 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

이다. 이것은 두 사건 A, B에 대한 합의 법칙을 나타낸다.

❷ 세 사건 A, B, C에 대하여 $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $C\cap A=\varnothing$일 때, $n(A\cup B\cup C)$ $=n(A)+n(B)+n(C)$

❸ **예제 01** 크기가 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 눈의 수의 합이 4 또는 8이 되는 경우의 수를 구하여라.

풀이 큰 주사위의 눈의 수를 x, 작은 주사위의 눈의 수를 y라고 할 때, 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 순서쌍 (x, y)로 나타내어 보자.

눈의 수의 합이 4인 사건을 A라고 하면

$$A=\{(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)\}$$

눈의 수의 합이 8인 사건을 B라고 하면

$$B=\{(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)\}$$

이때 두 사건 A, B는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=3+5=8$$

답 8

1

목표| 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 과일을 선택할 경우의 수는 3, 쿠키를 선택할 경우의 수는 4이므로 구하는 경우의 수는

$3+4=\mathbf{7}$

본문 해설

❶ 사건은 집합으로 나타낼 수 있으며 이때 사건의 경우의 수는 집합의 원소의 개수와 같다.
사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
로 구할 수 있다.
여기서 $n(A\cap B)=0$일 때 합의 법칙
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$
가 성립한다.

❷ 세 사건 A, B, C에 대해서도 합의 법칙이 성립한다.
$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$\quad -n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
로 구할 수 있다.
여기서 세 사건 A, B, C 중 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않을 때, 즉
$n(A\cap B)=n(B\cap C)=n(C\cap A)=n(A\cap B\cap C)=0$
일 때, 합의 법칙
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
가 성립한다.

❸ 경우의 수를 구할 때는 빠짐없이 중복되지 않게 모든 경우의 수를 생각한다. 이때 사건이 동시에 일어날 수 있는 사건인지 아닌지를 파악해야 한다. 수형도나 표를 만들어서 그 규칙성을 찾으면 경우의 수를 구하기 편리하다.

읽/기/자/료 사색문제

'사색문제'란 인접한 나라를 서로 다른 색으로 칠할 때, 임의의 지도 위의 나라들을 네 가지 색을 넘지 않고 칠할 수 있다는 가설을 말한다. 이 문제는 1852년 영국의 대학원생인 구드리에 의하여 처음 제기되어 그 스승인 드모르간(de Morgan)과 수학자 해밀턴(Hamilton)을 거쳐 세상에 알려졌지만 결국 논리적인 증명은 미해결 과제로 남게 되었다.
한 세기가 지난 1976년에 이 문제는 드디어 미국의 수학자 아펠(Appel)과 하켄(Haken)이 컴퓨터를 이용하여 모든 경우를 확인하여 이 문제를 해결하였는데, 컴퓨터의 소요 시간이 무려 1200시간이나 되었다고 한다.

교과서 15 쪽

문제 2 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 나온 눈의 수의 합이 5의 배수인 경우의 수

(2) 나온 눈의 수의 합이 10 이상인 경우의 수

곱의 법칙이란 무엇인가?

생각 열기 영화관

1907년 서울 종로 3가에 단성사가 세워졌을 당시 영화관은 주로 전통 연극을 공연하는 장소였다. 그런데 1990년대 이후 관람 수요가 급증하고 영화 시장이 개방되면서 영화관은 다양한 영화를 상영할 뿐만이 아니라 식사와 쇼핑 등을 즐길 수 있는 복합적인 공간인 멀티플렉스로 거듭나게 되었고, 어느덧 우리 삶 속의 문화 공간으로 자리 잡았다.

탐구 활동 어떤 영화관에서 현재 판타지 영화 3편, 코미디 영화 2편, 공포 영화 5편을 상영하고 있다고 한다. 이 영화관에서 현주와 원상이가 영화를 관람하려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

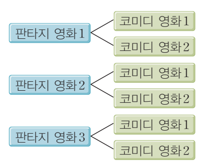
1. 현주는 판타지 영화 한 편을 먼저 관람한 뒤에 코미디 영화 한 편을 관람하려고 한다. 현주가 영화를 관람하는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 원상이는 코미디 영화 한 편을 먼저 관람한 뒤에 공포 영화 한 편을 관람하려고 한다. 원상이가 영화를 관람하는 경우의 수를 구하여 보자.

판타지 영화 3편 중에서 한 편을 먼저 보고, 코미디 영화 2편 중에서 한 편을 보는 경우를 생각하여 보자.

판타지 영화 3편 중에서 한 편을 보는 경우의 수는 3이고, 코미디 영화 2편 중에서 한 편을 보는 경우의 수는 2이다. 따라서 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 판타지 영화를 먼저 보고, 코미디 영화를 보는 경우의 수는

$$3\times2=6$$

이다.



2

목표 | 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 눈의 수의 합이 5인 사건을 A라고 하면

$A=\{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$

눈의 수의 합이 10인 사건을 B라고 하면

$B=\{(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)\}$

이때 두 사건 A, B는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=4+3=\mathbf{7}$$

(2) 눈의 수의 합이 10인 사건을 A라고 하면

$A=\{(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4)\}$

눈의 수의 합이 11인 사건을 B라고 하면

$B=\{(5,\ 6),\ (6,\ 5)\}$

눈의 수의 합이 12인 사건을 C라고 하면

$C=\{(6,\ 6)\}$

이때 세 사건 A, B, C는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)=3+2+1=\mathbf{6}$$

생각 열기 참 / 고 / 자 / 료

단성사(團成社)는 1907년 서울 종로3가에 세워진 한국 최초의 본격적인 상설 영화관이다. 1919년 10월 한국 최초의 영화로 알려진 “의리적 구토”를 단성사에서 개봉했으며, 이 날을 영화의 날로 제정했다. 그리고 1926년에는 나운규의 민족영화 “아리랑”이 개봉되었다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 상영하는 영화 중에서 한 편을 먼저 관람한 뒤에 다른 한 편을 관람하는 경우의 수를 구하는 과정을 통해 곱의 법칙을 이해하게 하려는 것이다.

1. 판타지 영화를 고르는 경우의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 코미디 영화를 고르는 경우의 수는 2이므로 구하는 경우의 수는

$3\times2=\mathbf{6}$

2. 코미디 영화를 고르는 경우의 수는 2이고, 그 각각에 대하여 공포 영화를 고르는 경우의 수는 5이므로 구하는 경우의 수는

$2\times5=\mathbf{10}$

3

목표| 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 상우가 자신의 셔츠를 하나 골라 입는 경우의 수는 5이고, 그 각각에 대하여 바지를 하나 골라 입는 경우의 수는 4이므로 구하는 경우의 수는

$5\times4=\mathbf{20}$

4

목표| 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 0부터 9까지의 수 중에서 홀수인 경우의 수는 5이므로 구하는 두 자리의 자연수의 개수는

$5\times5=\mathbf{25}$

(2) 0부터 9까지의 수 중에서 홀수인 경우의 수는 5, 짝수인 경우의 수는 5이므로 구하는 세 자리의 자연수의 개수는

$5\times5\times5=\mathbf{125}$

교과서 16 쪽

일반적으로 경우의 수에 대하여 다음과 같은 **곱의 법칙**이 성립한다.

> **곱의 법칙**
> 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는
> $$m\times n$$

참고 세 개 이상의 사건에서도 곱의 법칙이 성립한다.

문제 3 상우는 5종류의 셔츠와 4종류의 바지를 가지고 있다. 상우가 자신의 셔츠와 바지를 각각 하나씩 골라 입을 수 있는 경우의 수를 구하여라.

이제 집합의 개념을 이용하여 곱의 법칙을 생각하여 보자.

사건 A가 일어나는 경우의 집합을 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, 사건 B가 일어나는 경우의 집합을 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$이라고 하자.

A의 각 원소에 대하여 $b_1, b_2, \cdots, b_n$이 대응되므로 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

$$m\text{가지}\left\{\underbrace{\begin{array}{cccc}(a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \cdots, & (a_1, b_n)\\(a_2, b_1), & (a_2, b_2), & \cdots, & (a_2, b_n)\\\vdots & \vdots & & \vdots\\(a_m, b_1), & (a_m, b_2), & \cdots, & (a_m, b_n)\end{array}}_{n\text{가지}}\right.$$

따라서 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는

$$n(A)\times n(B)$$

이다. 이것은 두 사건 A, B에 대한 곱의 법칙을 나타낸다.

문제 4 다음을 구하여라.

(1) 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 모두 홀수인 두 자리의 자연수의 개수

(2) 백의 자리 숫자는 홀수, 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자는 짝수인 세 자리의 자연수의 개수

지/도/자/료

1. 곱집합

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 집합을 각각

$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$,

$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$

으로 나타내면 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 모든 경우의 집합은

$A\times B=\{(a_i, b_j)\,|\,a_i\in A, b_j\in B, i=1, 2, \cdots m, j=1, 2, \cdots, n\}$

과 같이 나타낼 수 있다.

따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$n(A\times B)=n(A)\times n(B)$$

또 세 사건 A, B, C에 대해서도

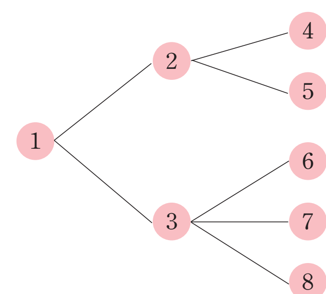
$$n(A\times B\times C)=n(A)\times n(B)\times n(C)$$

가 성립한다.

2. 수형도

점과 선으로 연결되어 있고 단일폐곡선이 없는 도형을 수형도(tree)라고 한다.

수형도는 어떤 사건이 일어나는 모든 경우를 나무에서 가지가 나누어지는 것과 같은 모양으로 나타낼 수 있다.



교과서 17 쪽

예제 02 144의 약수의 개수를 구하여라.

특별한 언급이 없는 한 일반적으로 '약수'는 양의 약수를 의미한다.

소수 a, b에 대하여 $a^m b^n$(m, n은 음이 아닌 정수)의 약수의 개수는

$(m+1)(n+1)$

이다.

풀이 144를 소인수분해하면

$144=2^4\times3^2$

2^4의 약수의 집합을 A, 3^2의 약수의 집합을 B라고 하면

$A=\{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4\}$

$B=\{1,\ 3,\ 3^2\}$

이때 2^4의 약수 각각에 대하여 3^2의 약수를 각각 곱하면 144의 약수가 되므로 144의 약수의 개수는

$n(A)\times n(B)=5\times3=15$

$\times$	1	3	3^2
1	1	3	3^2
2	2	2×3	2×3^2
2^2	2^2	$2^2\times3$	$2^2\times3^2$
2^3	2^3	$2^3\times3$	$2^3\times3^2$
2^4	2^4	$2^4\times3$	$2^4\times3^2$

답 15

문제 5 다음 수의 약수의 개수를 구하여라.

(1) 216　　(2) 600

발전 **문제 6** p, q, r가 서로 다른 소수이고, l, m, n이 음이 아닌 정수일 때, $p^l q^m r^n$의 약수의 개수는 $(l+1)(m+1)(n+1)$개임을 보여라.

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

2006년부터 시행된 '자동차 전국 단일 번호판 제도'에 따라 발급되는 자동차 번호판은 오른쪽 그림과 같이 두 자리 숫자와 한 글자의 한글 및 네 자리 숫자로 표시된다. 이때 최대로 만들 수 있는 자동차 번호판의 개수는 곱의 법칙으로 구할 수 있다. 이와 같이 주변에서 곱의 법칙이 적용되는 경우를 조사하여 말하여 보자.

5

목표| 곱의 법칙을 이용하여 약수의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 216을 소인수분해하면　$216=2^3\times3^3$

2^3의 약수의 집합을 A, 3^3의 약수의 집합을 B라고 하면

$A=\{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3\}$

$B=\{1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3\}$

이때 2^3의 약수 각각에 대하여 3^3의 약수를 각각 곱하면 216의 약수가 되므로 216의 약수의 개수는

$n(A)\times n(B)=4\times4=\mathbf{16}$

(2) 600을 소인수분해하면　$600=2^3\times3\times5^2$

2^3의 약수의 집합을 A, 3의 약수의 집합을 B, 5^2의 약수의 집합을 C라고 하면

$A=\{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3\}$

$B=\{1,\ 3\}$

$C=\{1,\ 5,\ 5^2\}$

이때 2^3의 약수 각각에 대하여 3의 약수와 5^2의 약수를 각각 곱하면 600의 약수가 되므로 600의 약수의 개수는

$n(A)\times n(B)\times n(C)=4\times2\times3=\mathbf{24}$

6

목표| 곱의 법칙을 이용하여 약수의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| p, q, r가 서로 다른 소수이고, l, m, n이 음이 아닌 정수일 때, $p^l q^m r^n$의 양의 약수는 $p^a q^b r^c$의 꼴이다.

이때 a, b, c는 정수이고, $0\le a\le l$, $0\le b\le m$, $0\le c\le n$이다.

따라서 $p^l q^m r^n$의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $(l+1)(m+1)(n+1)$이다.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 생활 주변에서 곱의 법칙이 적용되는 경우를 조사하여 봄으로써 곱의 법칙의 유용성을 알아보게 한다.

풀이| 두 사람이 가위바위보를 할 때 나올 수 있는 모든 경우의 수, 전화번호의 개수, 컴퓨터의 암호설정, 지도의 색칠, 운동 경기에서 대진표 작성 등에서 곱의 법칙이 적용이 된다.

지/도/자/료 양의 약수의 개수와 약수의 총합

자연수 N이 $N=p^a q^b r^c$과 같이 소인수분해될 때, N의 양의 약수는 $p^l q^m r^n$ ($l=0,\ 1,\ \cdots,\ a$, $m=0,\ 1,\ \cdots,\ b$, $n=0,\ 1,\ \cdots,\ c$)의 꼴로 나타내어진다.

따라서 자연수 N의 양의 약수의 개수는

$(a+1)(b+1)(c+1)$(개)

이고, 양의 약수의 총합은

$(1+p+\cdots+p^a)(1+q+\cdots+q^b)(1+r+\cdots+r^c)$

이다.

02 순열

소단원 지도 목표

① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

② 원순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

③ 중복순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

④ 같은 것이 있는 순열의 뜻을 알고, 그 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 순열과 순열의 수를 혼동하지 않게 한다. 순열이란 순서를 고려하여 나열하는 것을 말하고, 순열의 수는 모든 순열의 개수임을 이해하게 한다.

2. $0!$은 의미가 없으나 실제 순열의 계산에서는 필요하므로 $0!=1$로 정한다는 것을 이해하게 한다.

3. 원순열의 수를 계산할 때는 간단한 경우만 다루고, 염주순열과 같은 것이 있는 원순열은 다루지 않는다.

4. 같은 것이 있는 순열의 수는 먼저 같은 것들을 서로 구분한 경우의 수를 구한 다음, 같은 것들끼리 바꾸는 경우의 수를 나누어 계산하는 방법임을 알게 한다.

5. 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$에서는 $n \geq r$이지만 중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$에서는 $n < r$일 수도 있음을 이해하게 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 순열(順列, permutation)
- 계승(階乘, factorial)
- 원순열(圓順列, circular permutation)
- 중복순열(重複順列, repeated permutation)
- ${}_n\mathrm{P}_r$, $n!$, ${}_n\Pi_r$

교과서 18 쪽

02 순열

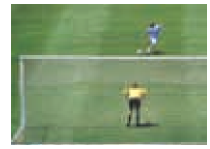
● 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.
● 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

순열이란 무엇인가?

생각 열기

승부차기

승부차기는 축구 경기에서 정규 시간과 연장전을 모두 치렀음에도 불구하고 승부를 가리지 못했을 경우 각 팀의 선수가 한 번씩 번갈아 가며 5회의 승부차기를 해서 승부를 가리는 일을 말한다.
한국스포츠심리학회지에 따르면 선수들이 가장 싫어하는 승부차기 순서는 1번과 5번으로, 가장 먼저 혹은 가장 마지막에 차야 한다는 부담감 때문이라고 한다.



탐구 활동

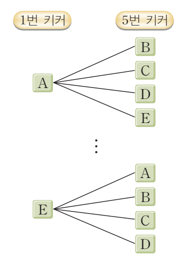
어느 축구 시합에서 승부차기를 할 5명의 키커 A, B, C, D, E를 선발하였다. 선발된 5명의 키커에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 선발된 5명의 키커 중에서 1번과 5번 키커를 먼저 정하려고 한다. 이때 1번과 5번 키커를 정하는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 선발된 5명의 키커 중에서 1번부터 5번까지 5명의 순서를 정하는 경우의 수를 구하여 보자.

탐구 활동에서 선발된 5명의 키커에 대하여 1번 키커를 정하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 5번 키커를 정하는 경우의 수는 4이므로 5명의 키커 중에서 1번과 5번 키커를 정하는 경우의 수는

$$5 \times 4 = 20$$

이다.



일반적으로 서로 다른 n개에서 $r(r \leq n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하고, 이 순열의 수를 기호로

$${}_n\mathrm{P}_r$$

와 같이 나타낸다.

● ${}_n\mathrm{P}_r$에서 P는 Permutation(순열)의 첫 글자이다.

생각 열기 참/고/자/료

축구 규칙은 축구 경기에 대한 종합적인 규칙으로, 국제축구평의회(IFAB)에 의하여 쓰여지고 관리된다.
대한축구협회(KFA)의 홈페이지(http://www.kfa.or.kr)에 방문하면 축구에 관한 다양한 정보를 얻을 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 승부차기에서 키커의 순서를 정하는 경우의 수를 구하는 과정을 통해 순열의 의미를 알게 하려는 것이다.

1. 1번 키커를 정하는 경우의 수는 5이고 5번 키커를 정하는 경우의 수는 4이므로 구하는 경우의 수는
$5 \times 4 = \mathbf{20}$

2. 5명의 순서를 정하는 경우의 수는
$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{120}$

교과서 19 쪽

이를테면 선발된 키커 5명 중 2명의 순서를 정하는 것과 같이 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 순열의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2$이다.

이제 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$를 구하는 방법을 알아보자.

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열할 때, 첫 번째 자리에 올 수 있는 경우는 n가지이고, 두 번째 자리에 올 수 있는 경우는 첫 번째 자리에 놓인 1개를 제외한 $(n-1)$가지, 세 번째 자리에 올 수 있는 경우는 앞의 두 자리에 놓인 2개를 제외한 $(n-2)$가지이다. 이런 방법으로 계속해 나가면 r번째 자리에 올 수 있는 경우는 $(n-r+1)$가지이다.

첫 번째	두 번째	세 번째	…	r번째
↑	↑	↑		↑
n가지	$(n-1)$가지	$(n-2)$가지	…	$(n-r+1)$가지

❶ 따라서 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \text{ (단, } 0<r\le n)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

● ${}_n\mathrm{P}_r$는 n부터 시작하여 1만큼씩 작은 수를 차례로 r개 곱한 것이다.

순열의 수 [1]

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} \text{ (단, } 0<r\le n)$$

보기 (1) ${}_5\mathrm{P}_2=5\times4=20$ (2) ${}_7\mathrm{P}_3=7\times6\times5=210$

문제 1 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_3\mathrm{P}_2$ (2) ${}_4\mathrm{P}_1$
(3) ${}_6\mathrm{P}_5$ (4) ${}_8\mathrm{P}_4$

문제 2 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r의 값을 구하여라.

(1) ${}_n\mathrm{P}_2=56$ (2) ${}_5\mathrm{P}_r=60$
(3) ${}_6\mathrm{P}_r=360$ (4) ${}_n\mathrm{P}_3=120$

교과서 20 쪽

문제 3 회원 수가 12명인 학생 복지 위원회에서 회장, 부회장, 총무를 각각 1명씩 선출하는 경우의 수를 구하여라.

서로 다른 n개에서 n개 모두를 택하는 순열의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r$에서 $r=n$인 경우이므로 다음과 같다.

$${}_n\mathrm{P}_n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$

이와 같이 1부터 n까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n의 **계승**이라고 하며, 이것을 기호로

$$n!$$

과 같이 나타낸다. 즉,

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$

이다.

● $n!$은 'n 팩토리얼(factorial)'이라고 읽는다.

한편 $r<n$일 때, 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$를 계승을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{P}_r&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)\cdots3\cdot2\cdot1}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

❷ 여기서 $0!=1$로 정의하면 위의 식은 $r=n$일 때에도 성립한다.

또 위의 식에서 $r=0$이면 ${}_n\mathrm{P}_0=\frac{n!}{n!}=1$이므로 ${}_n\mathrm{P}_0=1$로 정의한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❸ **순열의 수 [2]**

(1) ${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

(2) ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

보기 (1) ${}_6\mathrm{P}_2=\frac{6!}{(6-2)!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=30$ (2) $3!=3\times2\times1=6$

문제 4 다음 값을 구하여라.

(1) $5!$ (2) $4!\times0!$
(3) ${}_6\mathrm{P}_6$ (4) ${}_7\mathrm{P}_4\times3!$

본문 해설

❶ ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$은 n에서 0, 1, 2, …, $r-1$을 각각 뺀 r개의 수의 곱이다. 따라서 마지막 수는 $n-(r-1)=n-r+1$이 되는 것에 주의한다.

1

목표| 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **6** (2) **4** (3) **720** (4) **1680**

2

목표| 순열의 공식을 활용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $n(n-1)=56=8\times7$에서 $\boldsymbol{n=8}$

(2) ${}_5\mathrm{P}_r=60=5\times4\times3$에서 $\boldsymbol{r=3}$

(3) ${}_6\mathrm{P}_r=360=6\times5\times4\times3$에서 $\boldsymbol{r=4}$

(4) $n(n-1)(n-2)=120=6\times5\times4$에서 $\boldsymbol{n=6}$

3

목표| 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 12개 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_{12}\mathrm{P}_3=12\times11\times10=\mathbf{1320}$

본문 해설

❷ $n!$은 n이 자연수인 경우에만 정의되었으나 $0!=1$로 정의하면 등식 $n!=n(n-1)!$이 $n=1$일 때에도 성립하고, 여러 가지 경우에 편리하다.

❸ ${}_n\mathrm{P}_r$의 값을 계산하는 방법에는 다음 두 가지가 있다.

(i) ${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}}$

(ii) ${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}$

${}_5\mathrm{P}_2$, ${}_6\mathrm{P}_3$과 같이 n과 r의 값이 숫자로 주어질 때에는 (i)의 방법으로 계산하는 것이 간편하지만, n과 r의 값이 문자로 주어질 때에는 (ii)의 방법으로 계산하는 것이 편리하다.

4

목표| 순열의 수를 계승을 이용하여 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $5!=5\times4\times3\times2\times1=\mathbf{120}$

(2) $4!\times0!=(4\times3\times2\times1)\times1=\mathbf{24}$

(3) ${}_6P_6=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=\mathbf{720}$

(4) ${}_7P_4\times3!=\dfrac{7!}{(7-4)!}\times3!=7!$

$=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=\mathbf{5040}$

5

목표| 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 짝수가 되는 경우는 일의 자리 숫자가 2, 4, 6인 세 가지가 있다. 이때 나머지 5개의 숫자를 나열하는 순열의 수는 ${}_5P_5$이다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_5P_5\times3=5!\times3=\mathbf{360}$

(2) 이웃하는 홀수를 하나로 묶어서 생각하고 3개의 짝수와 함께 숫자 4개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 ${}_4P_4$이다. 이때 그 각각에 대하여 홀수 3개가 자리를 바꾸는 경우의 수는 ${}_3P_3$이다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4P_4\times{}_3P_3=4!\times3!=\mathbf{144}$

6

목표| 순열을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) 양쪽 끝에 어른 두 명이 서는 경우의 수는 ${}_3P_2$이고, 나머지 네 명이 가운데에 서는 경우의 수는 ${}_4P_4$이다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_3P_2\times{}_4P_4=6\times4!=\mathbf{144}$

(2) 어른 3명이 한 줄로 서는 경우의 수는 ${}_3P_3$, 어린이 3명이 한 줄로 서는 경우의 수는 ${}_3P_3$, 어른과 어린이가 교대로 서는 경우의 수는 2이다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_3P_3\times{}_3P_3\times2=3!\times3!\times2=\mathbf{72}$

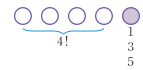
교과서 21 쪽

예제 01 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 한 번씩 사용하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

(1) 홀수가 되는 경우의 수

(2) 짝수 2개가 서로 이웃하는 경우의 수

풀이 (1) 홀수가 되는 경우는 일의 자리 숫자가 1, 3, 5인 세 가지가 있다. 이때 나머지 4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 4개에서 4개를 택하는 순열의 수이므로 ${}_4P_4$이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$3\times{}_4P_4=3\times4!=72$



(2) 이웃하는 짝수를 하나로 묶어서 생각하고 3개의 홀수와 함께 숫자 4개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 ${}_4P_4$이다. 이때 그 각각에 대하여 짝수 2개가 자리를 바꾸는 경우의 수가 ${}_2P_2$이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
${}_4P_4\times{}_2P_2=4!\times2!=48$

A, B가 이웃하는 경우는 A, B를 하나로 묶어서 생각한다.

답 (1) 72 (2) 48

문제 5 6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6을 한 번씩 사용하여 여섯 자리의 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

(1) 짝수가 되는 경우의 수

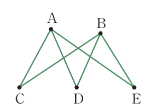
(2) 홀수 3개가 이웃하는 경우의 수

실생활 **문제 6** 어른 3명과 어린이 3명이 한 줄로 서서 사진을 찍을 때, 다음을 구하여라.

(1) 양쪽 끝에 어른이 서는 경우의 수

(2) 어른과 어린이가 교대로 서는 경우의 수

발전 **문제 7** 오른쪽 그림은 5개의 도시 A, B, C, D, E를 연결하는 도로를 나타낸 것이다. 이 도로를 이용하여 5개의 도시를 모두 여행하는 경우의 수를 구하여라. (단, 한 번 여행한 도시는 다시 지나가지 않는다.)



7

목표| 순열을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 두 도시 A, B를 직접 연결하는 도로와 세 도시 C, D, E를 직접 연결하는 도로가 없으므로 5개의 도시를 모두 여행하려면 C, D, E와 A, B를 교대로 지나가야 한다.
C, D, E를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_3=3!=6$
A, B를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2P_2=2!=2$
이때 일렬로 나열한 C, D, E 사이에 A, B를 넣어야 하므로 구하는 경우의 수는 $6\times2=\mathbf{12}$

8

목표| 순열의 수에 대한 공식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (가): $\boldsymbol{n-r}$, (나): $\boldsymbol{n}$

교과서 22 쪽

예제 02 $1 \le r \le n$일 때, 등식 ${}_{n}\mathrm{P}_{r} = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이 성립함을 증명하여라.

증명 $n \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1} = n \cdot \dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$= \dfrac{n!}{(n-r)!} = {}_{n}\mathrm{P}_{r}$

따라서 ${}_{n}\mathrm{P}_{r} = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이 성립한다.

문제 8 다음은 $1 \le r < n$일 때, 등식 ${}_{n}\mathrm{P}_{r} = {}_{n-1}\mathrm{P}_{r} + r \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$임을 증명하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 식을 써넣어라.

$$\begin{aligned} &{}_{n-1}\mathrm{P}_{r} + r \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!} + \frac{r \cdot (n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!} \\ &= \frac{(\boxed{(가)}) \cdot (n-1)!}{(n-r)!} + \frac{r \cdot (n-1)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{\boxed{(나)} \cdot (n-1)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} = {}_{n}\mathrm{P}_{r} \end{aligned}$$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

$1 \le r \le n$일 때, 등식 ${}_{n}\mathrm{P}_{r} = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이 성립함은 다음과 같이 설명할 수 있다.

> ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$는 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수이다.
> n개에서 한 개를 택하는 경우는 n가지이고, 그 각각에 대하여 하나를 택하고 남은 $(n-1)$개에서 $(r-1)$개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이다.
> 따라서 ${}_{n}\mathrm{P}_{r} = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이 성립한다.

이와 같은 방법으로 $1 \le r < n$일 때, 등식 ${}_{n}\mathrm{P}_{r} = {}_{n-1}\mathrm{P}_{r} + r \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이 성립함을 설명하여 보자.

교과서 23 쪽

원순열이란 무엇인가?

생각 열기 **강강술래**

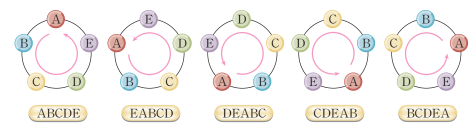
강강술래는 1966년 중요무형문화재 제8호로 지정된 민속놀이로, 주로 남해안 일대에서 대보름날이나 한가윗날 달밤에 여러 사람이 함께 손을 잡고 둥글게 돌면서 노는 민속놀이이다. 임진왜란 때 왜군의 눈을 속이기 위하여 이순신 장군이 여자들을 모아 남장을 하게 하고 옥매산을 돌도록 한 데서 비롯되었다는 설이 있다.

탐구 활동 **A, B, C, D, E 다섯 사람이 강강술래를 하려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 다섯 사람이 일렬로 서는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 다섯 사람이 일렬로 설 때, A, B, C, D, E의 순서로 서는 것과 B, C, D, E, A의 순서로 서는 것은 같은 경우인가?
3. 다섯 사람이 손을 잡고 둥글게 설 때, A, B, C, D, E의 순서로 서는 것과 B, C, D, E, A의 순서로 서는 것은 같은 경우인가?

A, B, C, D, E 다섯 사람이 손을 잡고 강강술래를 할 때, 둥글게 서는 경우의 수에 대하여 알아보자.

다섯 사람이 둥글게 설 때에는 처음과 끝의 구별이 없고, 회전하여도 순서는 바뀌지 않으므로 다음 5가지 경우는 모두 같은 경우로 생각할 수 있다.



즉, 다섯 사람이 한 줄로 서는 경우의 수는 ${}_{5}\mathrm{P}_{5}$이지만 둥글게 설 때에는 그림과 같이 5가지씩 같은 경우가 생긴다. 따라서 다섯 사람이 둥글게 서는 경우의 수는

$$\frac{{}_{5}\mathrm{P}_{5}}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 24$$

이다.

사고력 기르기 추론

출제 의도| 순열의 수에 대한 공식의 의미를 이해하게 한다.

풀이| n개 중에서 A를 임의로 정하면 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우는 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) r개 중에 A가 포함되는 경우: A를 제외한 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하여 일렬로 나열한 후 A를 $(r-1)$개 사이에 배치하는 경우이므로 그 경우의 수는 $r \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

(ii) r개 중에 A가 포함되지 않는 경우: A를 제외한 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우이므로 그 경우의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{P}_{r}$

(i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 n개에서 r개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 ${}_{n}\mathrm{P}_{r} = {}_{n-1}\mathrm{P}_{r} + r \cdot {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이 성립함을 알 수 있다.

생각 열기 참/고/자/료

강강술래는 1966년 중요무형문화재 제8호로 지정된 민속놀이로 2009년 9월에는 유네스코 인류구전 및 무형유산 걸작으로 선정되었다.

유래를 살펴보면 임진왜란 때 이순신 장군이 수병을 거느리고 해남의 우수영에서 왜군과 대치할 때 부녀자들을 남장을 하게 하고 옥매산(玉埋山)에 올라가 빙빙 돌게 했다고 한다. 그러자 바다 위의 왜군들은 이순신의 군사의 수가 매우 많은 줄로 알고 겁을 먹고 달아나 버렸다 한다. 싸움이 끝난 뒤 부근의 마을 부녀자들이 이를 기념하기 위하여 '강강술래'라는 노래를 부르며 즐기던 것이 바로 오늘날의 강강술래라고 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 강강술래를 이용하여 원순열의 의미를 알게 하려는 것이다.

1. $5!=\mathbf{120}$

2. 처음에 서는 순서가 다르므로 다른 경우이다.

3. 처음과 끝의 구별이 없고, 회전하여도 순서는 바뀌지 않으므로 같은 경우이다.

본문 해설

❶ 서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는 서로 다른 n개를 일렬로 배열한 수를 n으로 나눈 것과 같다.

즉, $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

왜냐하면 n개를 원형으로 나열할 때, 같은 것이 n개씩 있기 때문이다. 이 원순열의 수는 n개의 서로 다른 것 중의 하나를 고정시키고 나머지 $(n-1)$개를 일렬로 배열하는 순열의 수와 같음을 알 수 있다.

교과서 24 쪽

이와 같이 서로 다른 것을 원형으로 나열하는 순열을 **원순열**이라 하고, 일반적으로 원순열의 수는 다음과 같다.

❶ **원순열의 수**

서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는

$$\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{n}}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

예제 03 6명의 가족이 둥근 식탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하여라.

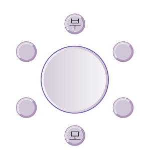
(1) 6명이 식탁에 앉는 경우의 수

(2) 부모가 서로 마주 보고 앉는 경우의 수

풀이 (1) 6명이 식탁에 앉는 경우의 수는 원순열의 수이므로

$$(6-1)!=5!=120$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 부모를 먼저 자리에 앉히고 다른 가족 4명이 나머지 자리에 앉으면 된다. 이때 다른 가족 4명이 나머지 자리에 앉는 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{P}_{4}$이므로 구하는 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{P}_{4}=4!=24$

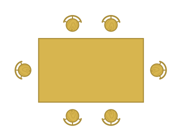


답 (1) 120 (2) 24

문제 9 남학생 3명과 여학생 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 남학생과 여학생이 서로 교대로 앉는 경우의 수를 구하여라.

발전

문제 10 6명이 오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양의 6인용 식탁에 둘러앉는 경우의 수를 구하여라.



9

목표 | 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 남학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

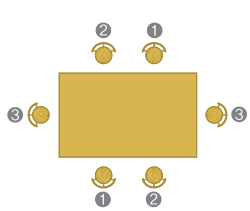
남학생 사이사이 3개의 자리에 여학생 3명을 앉히는 경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{P}_{3}=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times6=\mathbf{12}$

10

목표 | 원순열을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 어느 한 사람이 자리를 택하는 방법은 오른쪽 그림과 같이 ❶, ❷, ❸의 3가지이고, 나머지 5명이 앉는 방법은 일렬로 앉는 방법과 같으므로 $5!$가지이다.

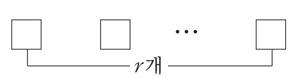


따라서 구하는 경우의 수는 $3\times5!=\mathbf{360}$

본문 해설

❷ 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열의 수를 생각해 보자.

먼저 r개를 뽑아 다음 자리에 일렬로 배열한다고 하자.



첫 번째 칸에 배열할 수 있는 것은 n가지이고, 중복을 허락하므로 두 번째 칸에 배열할 수 있는 것도 n가지이다. 마찬가지로 각각의 칸에 n가지가 들어갈 수 있으므로 이 중복순열의 수는

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^{r}$$

이다.

❸ 중복순열의 기호 ${}_{n}\Pi_{r}$는 Π의 왼쪽에 표시한 수 n을 Π의 오른쪽에 표시한 수만큼 거듭하여 곱하는 것을 나타낸다. 즉

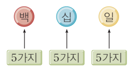
$${}_{n}\Pi_{r}=\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}$$

교과서 25 쪽

중복순열이란 무엇인가?

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 사용하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 같은 숫자를 중복하여 쓸 수 있다고 하면 세 자리의 자연수는 모두 몇 개를 만들 수 있는지 알아보자.

백의 자리 숫자를 택하는 경우는 5가지이고, 그 각각에 대하여 십의 자리 숫자를 택하는 경우는 5가지이다. 또 이들 각각에 대하여 일의 자리 숫자를 택하는 경우도 5가지이다.



따라서 구하는 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$5\times5\times5=5^3=125$$

이다.

2 일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열을 **중복순열**이라 하고, 그 수를 기호로

$$_n\Pi_r$$

와 같이 나타낸다. 이때 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열은 r개의 자리에 올 수 있는 경우의 수가 모두 n이므로 곱의 법칙에 의하여

3 $$_n\Pi_r=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^r$$

임을 알 수 있다.

● Π는 Product(곱)의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라고 읽는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

중복순열의 수

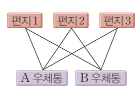
서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$$_n\Pi_r=n^r$$

● $_n\Pi_r$에서는 중복을 허용하므로 $n<r$인 경우도 있다.

예제 04 서로 다른 3통의 편지를 A, B 두 우체통에 넣는 경우의 수를 구하여라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 우체통에 편지를 넣는 경우의 수는 A, B 두 우체통에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 $_2\Pi_3=2^3=8$ 답 8



문제 11 4명의 학생이 가위바위보를 한 번 할 때, 나올 수 있는 경우의 수를 구하여라.

교과서 26 쪽

문제 12 3개의 숫자 1, 2, 3으로 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중에서 홀수의 개수를 구하여라.

같은 것이 있는 순열이란 무엇인가?

탐구 활동 **모양과 크기가 같은 흰 바둑돌 3개와 검은 바둑돌 1개에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 4개의 바둑돌을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 다음 그림과 같이 번호를 붙인 흰 바둑돌 3개와 검은 바둑돌 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하여 보자.

   ① ② ③ ❹

3. 1, 2를 비교하여 2는 1의 몇 배인지 구하여 보자.

모양과 크기가 같은 흰 바둑돌 3개와 검은 바둑돌 2개를 일렬로 나열하는 순열의 수를 구하여 보자.

구하는 순열의 수를 x라 하고, 그중 한 가지 순열인 ○○○●●을 생각하여 보자.

○○○●●에서 3개의 흰 바둑돌을 구별하여 각각 ①, ②, ③이라 하고, 2개의 검은 바둑돌을 구별하여 각각 ❹, ❺라고 하면 ○○○●●와 같이 나열하는 경우의 수는 $3!\times2!$이다.

①②③❹❺ ①②③❺❹
①③②❹❺ ①③②❺❹
②①③❹❺ ②①③❺❹
②③①❹❺ ②③①❺❹
③①②❹❺ ③①②❺❹
③②①❹❺ ③②①❺❹

마찬가지로 x가지의 순열 각각에 대하여도 $(3!\times2!)$가지의 경우가 있으므로 3개의 흰 바둑돌과 2개의 검은 바둑돌을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$x\times(3!\times2!) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 한편 서로 다른 5개의 바둑돌을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!$이고, 이것은 ①과 같으므로

$$x\times(3!\times2!)=5!$$

이다. 따라서 구하는 순열의 수는

$$x=\frac{5!}{3!\times2!}=10$$

이다.

11

목표 | 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$_3\Pi_4=3^4=\mathbf{81}$

12

목표 | 중복순열을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 3가지이므로 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수, 즉 $_3\Pi_3$과 같다.
그 각각에 대하여 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3이므로 구하는 경우의 수는

$_3\Pi_3\times2=3^3\times2=\mathbf{54}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 모양과 크기가 같은 바둑돌을 나열하는 경우의 수를 구하는 과정을 통해 같은 것이 있는 순열을 이해하게 하려는 것이다.

1. 4개의 바둑돌을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=\mathbf{24}$

2. ①②③❹ ①③②❹
②①③❹ ②③①❹
③①②❹ ③②①❹
의 6가지이다.

3. 2는 1의 $\dfrac{1}{4}$배이다.

본문 해설

❶ 같은 것이 있는 순열의 수

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \ (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

은 $p=q=\cdots=r=1$일 때의 순열의 수 ${}_nP_n=n!$을 일반화한 것이다.
특히 같은 것이 있는 순열의 수에서 $p+q+\cdots+r=n$임에 주의한다.

13

목표 | 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 구하는 순열의 수는

$$\frac{7!}{1!1!2!3!}=\mathbf{420}$$

14

목표 | 같은 것이 있는 순열을 이용하여 바둑판 모양의 도로에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!2!}=10$

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $10\times6=\mathbf{60}$

교과서 27 쪽

일반적으로 같은 것이 있는 순열의 수는 다음과 같다.

❶ **같은 것이 있는 순열의 수**

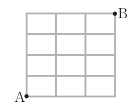
n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \ (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

보기 영어 단어 'coffee'의 6개 알파벳을 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{6!}{1!1!2!2!}=180$

문제 13 영어 단어 'success'의 7개 알파벳을 일렬로 나열하는 순열의 수를 구하여라.

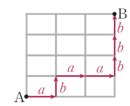
예제 05 오른쪽 그림과 같은 도로가 있다. A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하여라.



● 최단 거리로 가는 방법은 오른쪽과 위쪽으로만 가는 방법이다.

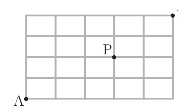
풀이 오른쪽 그림과 같이 가로로 한 칸 가는 것을 a, 세로로 한 칸 가는 것을 b로 놓으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3개의 a와 4개의 b를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!4!}=35$



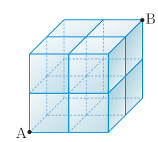
답 35

문제 14 오른쪽 그림과 같은 도로가 있다. A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하여라.



창의 up

오른쪽 그림은 선을 따라 수평과 수직으로 이동할 수 있는 놀이 기구이다. 이 놀이 기구의 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하는 방법을 설명하여라.

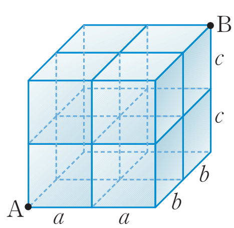


창의 UP

출제 의도 | 같은 것이 있는 순열을 이용하여 공간에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 오른쪽 그림과 같이 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 6개의 문자 a, a, b, b, c, c를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{2!2!2!}=\mathbf{90}$$



지/도/자/료 같은 것이 있는 순열

세 문자 a, b, c가 각각 p, q, r개씩 있고 $p+q+r=n$일 때, n개를 모두 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수를 구하여 보자.
먼저 n개의 자리에서 p개의 a를 배열할 자리를 선택하는 방법의 수는 ${}_nC_p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$

이제 $(n-p)$개의 빈 자리 중에서 q개의 b를 배열할 자리를 선택하는 방법의 수는 ${}_{n-p}C_q=\frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!}$

마지막으로 $n-p-q(=r)$개의 빈 자리에 r개의 c를 배열할 자리를 선택하는 방법의 수는

$${}_{n-p-q}C_r=\frac{(n-p-q)!}{r!(n-p-q-r)!}=\frac{r!}{r!0!}=1$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_{n-p-q}C_r&=\frac{n!}{p!(n-p)!}\times\frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!}\times1\\&=\frac{n!}{p!q!(n-p-q)!}\\&=\frac{n!}{p!q!r!}\end{aligned}$$

교과서 28 쪽

03 조합

● 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.
● 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.

조합이란 무엇인가?

생각 열기 얼음과자

얼음과자의 역사는 고대에 음식물을 냉장시키는 것에서 시작하는데, 마르코 폴로의 "동방견문록"에 의하면 중국에서는 기원전 3세기경부터 얼음에 소금과 과일을 넣어 만든 셔벗 형태의 얼음과자를 즐겼다고 한다. 서양에서는 알렉산더 대왕이 높은 산에서 운반한 눈에 꿀, 과일, 우유 또는 양의 젖을 섞은 것을 즐겨 먹었다고 전해지며, 로마 시대에는 여름에 상점에서 얼음 음료를 팔았다고 한다.

탐구 활동 **바닐라, 초콜릿, 딸기, 아몬드 아이스크림을 판매하는 어느 아이스크림 전문점에서 아이스크림을 주문하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 두 가지 아이스크림을 반씩 섞어서 주문할 때, 그릇에 담는 순서를 정하여 택하는 경우를 구하여 보자.
2. 두 가지 아이스크림을 반씩 섞어서 주문할 때, 그릇에 담는 순서를 정하지 않고 택하는 경우는 1과 어떤 차이가 있는지 말하여 보자.

순열에서는 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 순서를 생각하고 나열하는 경우의 수를 다루었다. 이제 순서를 생각하지 않고 택하는 경우의 수에 대하여 알아보자.

탐구 활동에서 네 가지 종류의 아이스크림에서 두 가지를 순서대로 택하여 그릇에 담는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$이지만, 순서를 생각하지 않고 두 가지를 택하여 그릇에 담는 경우는 다음과 같이 6가지가 있다.

{바닐라, 초콜릿}, {바닐라, 딸기}, {바닐라, 아몬드},
{초콜릿, 딸기}, {초콜릿, 아몬드}, {딸기, 아몬드}

일반적으로 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r $(r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라고 하며, 이 조합의 수를 기호로

$${}_nC_r$$

와 같이 나타낸다.

${}_nC_r$에서 C는 Combination (조합)의 첫 글자이다.

새로 나온 용어와 기호

- 조합(組合, combination)
- 중복조합(重複組合, repeated combination)
- ${}_nC_r$, ${}_nH_r$

생각 열기 참/고/자/료

얼음과자는 설탕물에 과일즙이나 우유 또는 향료 따위를 섞어 얼려서 만든 것이다. 얼음과자의 대표적인 것은 아이스크림이다. 아이스크림은 차가운 디저트로 보통 크림에 향료와 거품을 낸 흰자위를 넣고 얼린 것이다. 아이스크림은 오랫동안 부유층의 전유물로 여겨져 오다가 1851년 미국에서 농장을 경영하던 제이콥 푸셀이란 사람에 의하여 대중화되기 시작하였다. 푸셀이 크림의 낭비를 줄이기 위하여 얼려서 보관했던 것이 대중들에게 엄청난 인기를 끌게 된 것이다.

03 조합

소단원 지도 목표

① 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있게 한다.
② 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 조합의 수 ${}_nC_r$와 순열의 수 ${}_nP_r$ 사이의 관계를 적절한 예를 통하여 이해시킨다.
2. 중복조합의 뜻을 알게 하고, 중복조합을 조합으로 나타내어 여러 가지 경우의 수를 구하게 한다.
3. 중복조합에서 순서를 고려하면 중복순열이 됨을 이해하게 한다.
4. 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 서로 다른 $(n+r-1)$개에서 r개를 택하는 조합의 수와 같음을 이해하게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 아이스크림을 주문할 때, 그릇에 담는 순서를 정하여 택하는 경우와 순서를 정하지 않고 택하는 경우를 구하여 순열과 조합의 차이점을 생각해 보게 하기 위한 것이다.

1. 그릇에 담는 순서를 정하여 택하는 경우는
{바닐라, 초콜릿}, {바닐라, 딸기}, {바닐라, 아몬드},
{초콜릿, 바닐라}, {초콜릿, 딸기}, {초콜릿, 아몬드},
{딸기, 바닐라}, {딸기, 초콜릿}, {딸기, 아몬드},
{아몬드, 바닐라}, {아몬드, 초콜릿}, {아몬드, 딸기}
의 12가지이다.
2. 그릇에 담는 순서를 정하지 않고 택하는 경우는
{바닐라, 초콜릿}, {바닐라, 딸기}, {바닐라, 아몬드},
{초콜릿, 딸기}, {초콜릿, 아몬드}, {딸기, 아몬드}
의 6가지이다.
이때 **1**과 **2**의 차이는 같은 종류의 두 아이스크림의 순서 구분 여부이다.

교과서 29 쪽

이제 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$를 구하는 방법을 알아보자.

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$이고, 그 각각에 대하여 r개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $r!$이다.

따라서 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}\times r!$이다. 이때 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$이므로

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}\times r!={}_{n}\mathrm{P}_{r}$$

이다. 즉,

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

이다.

위의 식에서 $r=0$이면 $0!=1$이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{0}=\frac{n!}{0!n!}=1$이다.

따라서 ${}_{n}\mathrm{C}_{0}=1$로 정의하면 위의 식은 $r=0$일 때에도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **조합의 수**

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

보기 ${}_{10}\mathrm{C}_{4}=\frac{{}_{10}\mathrm{P}_{4}}{4!}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

문제 1 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_{4}\mathrm{C}_{2}$ (2) ${}_{5}\mathrm{C}_{5}$

(3) ${}_{9}\mathrm{C}_{6}$ (4) ${}_{10}\mathrm{C}_{0}$

문제 2 다음 등식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

(1) ${}_{n+2}\mathrm{C}_{n}=15$ (2) ${}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{4}\mathrm{C}_{3}={}_{n}\mathrm{C}_{2}$

문제 3 무지개의 7가지 색 중에서 4가지를 고르는 경우의 수를 구하여라.

본문 해설

❶ 예를 들어 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 3개를 선택하는 경우는 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\cdots$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$의 ${}_{5}\mathrm{C}_{3}$이고 그 각각에 대하여 $3!$가지의 순열을 만들 수 있다. 즉, $\{1, 2, 3\}$은 123, 132, 213, 231, 312, 321과 같이 $3!$가지의 순열을 만들 수 있다. 그런데 5개에서 3개를 택하는 순열의 수는 ${}_{5}\mathrm{P}_{3}$이므로 다음이 성립한다.

${}_{5}\mathrm{C}_{3}\times3!={}_{5}\mathrm{P}_{3}$

따라서 ${}_{5}\mathrm{C}_{3}=\frac{{}_{5}\mathrm{P}_{3}}{3!}$이다.

이것을 일반화하면 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}$를 얻을 수 있다.

1

목표| 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) ${}_{4}\mathrm{C}_{2}=\frac{{}_{4}\mathrm{P}_{2}}{2!}=\frac{4\times3}{2\times1}=\mathbf{6}$

(2) ${}_{5}\mathrm{C}_{5}=\frac{{}_{5}\mathrm{P}_{5}}{5!}=\mathbf{1}$

(3) ${}_{9}\mathrm{C}_{6}=\frac{{}_{9}\mathrm{P}_{6}}{6!}=\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=\mathbf{84}$

(4) ${}_{10}\mathrm{C}_{0}=\frac{{}_{10}\mathrm{P}_{0}}{0!}=\mathbf{1}$

2

목표| 조합의 공식을 활용할 수 있게 한다.

풀이| (1) ${}_{n+2}\mathrm{C}_{n}=\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=15$

$n^2+3n-28=0$, $(n-4)(n+7)=0$

$n\ge0$이므로 $n=\mathbf{4}$

(2) ${}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{4}\mathrm{C}_{3}=6+4=10$

즉, ${}_{n}\mathrm{C}_{2}=10$이므로 $\frac{n(n-1)}{2\times1}=10$

$n^2-n-20=0$, $(n-5)(n+4)=0$

$n\ge2$이므로 $n=\mathbf{5}$

3

목표| 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 7개에서 4개를 택하는 조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_{7}\mathrm{C}_{4}=\frac{{}_{7}\mathrm{P}_{4}}{4!}=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=\mathbf{35}$

지/도/자/료

고등학교 과정에서는 n개에서 r개를 선택하는 경우의 수를 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$로만 나타내지만, 일반적으로는 $\binom{n}{r}$과 같이 괄호를 사용하여 나타내기도 한다. 즉

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\binom{n}{r}=\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}$$

이다.

교과서 30 쪽

예제 01 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적힌 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 4개의 공을 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 1, 2가 적힌 공이 모두 포함되는 경우의 수

(2) 1, 2가 적힌 공이 모두 포함되지 않는 경우의 수

풀이 (1) 4개의 공 중에 1, 2가 적힌 공이 포함되어야 하므로 구하는 경우의 수는 1, 2가 적힌 공을 제외한 7개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는 $_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

(2) 4개의 공 중에 1, 2가 적힌 공이 포함되지 않아야 하므로 구하는 경우의 수는 1, 2가 적힌 공을 제외한 7개의 공 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는 $_7C_4=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$

답 (1) 21 (2) 35

문제 4 키가 모두 다른 10명으로 이루어진 농구 동호회에서 5명의 대표를 뽑을 때, 다음을 구하여라.

(1) 키가 가장 큰 선수와 가장 작은 선수가 함께 뽑히는 경우의 수

(2) 키가 가장 큰 선수는 뽑히고 가장 작은 선수는 뽑히지 않는 경우의 수

예제 02 남자 4명과 여자 5명 중에서 3명의 대표를 뽑을 때, 다음을 구하여라.

(1) 남자 1명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수

(2) 적어도 1명의 남자가 포함되는 경우의 수

풀이 (1) 남자 4명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는 $_4C_1$이고, 여자 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 $_5C_2$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $_4C_1\times{}_5C_2=4\times\frac{5\times4}{2\times1}=40$

(2) 적어도 1명의 남자가 포함되는 경우는 9명 중에서 3명을 뽑는 전체 경우에서 남자가 한 명도 뽑히지 않는 경우를 제외한 것과 같다. 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 $_9C_3$이고, 이 중에서 3명이 모두 여자인 경우의 수는 $_5C_3$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $_9C_3-{}_5C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}-\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=74$

답 (1) 40 (2) 74

교과서 31 쪽

문제 5 어느 학교의 기악 합주반에는 바이올린 연주자 6명, 첼로 연주자 4명이 있다. 이 중에서 4명의 연주자를 뽑을 때, 다음을 구하여라.

(1) 바이올린 연주자 2명, 첼로 연주자 2명을 뽑는 경우의 수

(2) 적어도 1명의 바이올린 연주자가 포함되는 경우의 수

예제 03 $0\le r\le n$일 때, 등식 $_nC_r={}_nC_{n-r}$가 성립함을 증명하여라.

$_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$에서 r 대신에 $n-r$를 대입한다.

증명 $_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}={}_nC_r$

따라서 $_nC_r={}_nC_{n-r}$가 성립한다.

문제 6 다음은 $1\le r<n$일 때, 등식 $_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$임을 증명하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 식을 써넣어라.

$$\begin{aligned}&_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r\\&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}\\&=\frac{\boxed{\text{(가)}}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{(\boxed{\text{(나)}})\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}\\&=\frac{\boxed{\text{(다)}}\cdot(n-1)!}{r!(n-r)!}\\&=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r\end{aligned}$$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

$0\le r\le n$일 때, 등식 $_nC_r={}_nC_{n-r}$가 성립함은 다음과 같이 설명할 수 있다.

> n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 n개에서 필요하지 않은 $(n-r)$개를 택하여 버리는 조합의 수와 같으므로 $_nC_r={}_nC_{n-r}$가 성립한다.

이와 같은 방법으로 $1\le r<n$일 때, 등식 $_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$가 성립함을 설명하여 보자.

4

목표| 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 키가 가장 큰 선수와 가장 작은 선수가 함께 뽑히므로 두 명을 제외한 8명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=\mathbf{56}$$

(2) 키가 가장 큰 선수는 뽑히고 가장 작은 선수는 뽑히지 않으므로 두 명을 제외한 8명 중에서 4명의 대표를 뽑는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=\mathbf{70}$$

5

목표| 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 바이올린 연주자 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 $_6C_2$이고, 첼로 연주자 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 $_4C_2$이다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$_6C_2\times{}_4C_2=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=\mathbf{90}$$

(2) 전체 10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 $_{10}C_4$이고, 첼로 연주자 4명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 $_4C_4$이다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$_{10}C_4-{}_4C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}-1=210-1=\mathbf{209}$$

6

목표| 조합의 수에 대한 공식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (가): $\boldsymbol{r}$, (나): $\boldsymbol{n-r}$, (다): $\boldsymbol{n}$

사고력 기르기 추론

출제 의도| 조합의 수에 관한 여러 가지 공식을 증명하는 다양한 방법이 있음을 알게 한다.

풀이| n개 중에서 A를 임의로 정하면 n개에서 r개를 택하는 경우는 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) r개 중에 A가 포함되는 경우: A를 제외한 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하는 경우이므로 그 경우의 수는

$_{n-1}C_{r-1}$

(ii) r개 중에 A가 포함되지 않는 경우: A를 제외한 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하는 경우이므로 그 경우의 수는

$_{n-1}C_{r}$

(i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 n개에서 r개를 택하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}$가 성립함을 알 수 있다.

교과서 32 쪽

중복조합이란 무엇인가?

탐구 활동 상일이는 선물가게에서 흰색, 빨간색, 파란색 세 종류의 머그잔 중에서 친구들에게 선물할 머그잔을 구입하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 머그잔 2개를 서로 다른 색으로 구입하는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 머그잔 4개를 구입하는 경우의 수는 어떻게 구할 수 있는지 말하여 보자.

탐구 활동에서 흰색 머그잔을 a, 빨간색 머그잔을 b, 파란색 머그잔을 c라고 할 때, 세 종류의 머그잔 중에서 4개의 머그잔을 구입하는 경우의 수는 서로 다른 세 문자 a, b, c에서 중복을 허락하여 네 문자를 택하는 조합의 수로 구할 수 있다.

서로 다른 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 조합은

$$aaaa,\quad aaab,\quad aaac,\quad aabb,\quad aabc,$$
$$aacc,\quad abbb,\quad abbc,\quad abcc,\quad accc,$$
$$bbbb,\quad bbbc,\quad bbcc,\quad bccc,\quad cccc$$

의 15가지이다.

이때 각 조합에서 선택된 네 문자를 a, b, c 순으로 나열한 후 문자를 ●로 나타내고 서로 다른 세 문자의 경계에는 ▮를 사용하여 나타내어 보자.

즉, 왼쪽부터 첫 번째 ▮의 왼쪽의 ●는 a, 첫 번째 ▮와 두 번째 ▮ 사이의 ●는 b, 두 번째 ▮의 오른쪽의 ●는 c로 나타내면

●●●●▮▮　●●●▮●▮　●●●▮▮●　●●▮●●▮　●●▮●▮●
●●▮▮●●　●▮●●●▮　●▮●●▮●　●▮●▮●●　●▮▮●●●
▮●●●●▮　▮●●●▮●　▮●●▮●●　▮●▮●●●　▮▮●●●●

이다.

a를 3개, c를 1개 택하는 조합인 $aaac$는 ●●●▮▮● 로 대응되고, b를 4개 택하는 조합인 $bbbb$는 ▮●●●●▮ 로 대응된다.

그러면 세 문자 a, b, c에서 중복을 허락하여 네 문자를 택하는 조합은 4개의 ●와 2개의 ▮로 이루어진 순열로 볼 수 있다.

따라서 구하는 조합의 수는 같은 것이 있는 순열의 수를 구하는 식에 의하여

$$\frac{\{4+(3-1)\}!}{4!(3-1)!}=\frac{6!}{4!2!}=15$$

임을 알 수 있다.

그리고 이것은 조합의 수 $_{4+(3-1)}C_{4}={}_{6}C_{4}$와 같다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 머그잔을 중복을 허락하여 구입하는 경우의 수를 구하는 과정을 통해 중복조합을 이해하게 하려는 것이다.

1. 머그잔 2개를 서로 다른 색으로 구입하는 경우는 {흰색, 빨간색}, {흰색, 파란색}, {빨간색, 파란색}의 3가지이다.

2. 머그잔 4개를 구입하는 경우의 수는 서로 다른 세 문자에서 중복을 허락하여 네 문자를 택하는 조합의 수로 구할 수 있다.

지/도/자/료 순열, 중복순열, 조합, 중복조합의 구별법

고등학교에서는 순열, 중복순열, 조합, 중복조합을 모두 배운다. 그러나 학생들이 실제로 이들 문제를 대하고 보면 그것이 어느 것에 관한 문제인지 구별하기란 쉽지 않다. 여기서 이들의 구별을 좀 더 쉽고 편리하게 하기 위하여 다음과 같이 간단히 표로 정리하였다.

<table>
<tr><th colspan="4">$n \longrightarrow r$
(서로 다른 n개에서 r개를 뽑는다.)</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">r / n</td><td colspan="2">뽑은 r개의 순서를 바꾸어 보면</td></tr>
<tr><td>서로 다르다.
(순열)</td><td>서로 같다.
(조합)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">뽑은 것을
또 뽑을 수</td><td>없다.(보통)</td><td>$_{n}P_{r}$</td><td>$_{n}C_{r}$</td></tr>
<tr><td>있다.(중복)</td><td>$_{n}\Pi_{r}$</td><td>$_{n}H_{r}$</td></tr>
</table>

이와 같이 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 **중복조합**이라 하고, 그 수를 기호로

$${}_n\mathrm{H}_r$$

와 같이 나타낸다.

$_n\mathrm{H}_r$에서 H는 Homogeneous의 첫 글자이다.

❶ 중복조합의 수 $_n\mathrm{H}_r$는 r개의 ●와 경계를 나타내는 $(n-1)$개의 ▮로 이루어진 같은 것이 있는 순열의 수와 같으므로 다음 등식이 성립한다.

$${}_n\mathrm{H}_r=\frac{\{r+(n-1)\}!}{r!(n-1)!}={}_{r+(n-1)}\mathrm{C}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **중복조합의 수**

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

참고 $_n\mathrm{H}_r$에서는 중복을 허용하므로 $n<r$인 경우도 있다.

문제 7 사탕, 초콜릿, 쿠키 3종류의 간식에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수를 구하여라.

예제 04 $(a+b+c)^4$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

풀이 $(a+b+c)^4$을 전개할 때 생기는 항들은

$$a^4,\ a^3b,\ a^2bc,\ bc^3,\ \cdots$$

등으로 모두 4차의 꼴이다. 이것은

$$aaaa,\ aaab,\ aabc,\ bccc,\ \cdots$$

등으로 볼 수 있으므로 서로 다른 항의 개수는 a, b, c의 세 문자에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$$

답 15

문제 8 $(a+b+c+d)^6$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

본문 해설

❶ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 r개의 ●와 $(n-1)$개의 ▮로 이루어진 같은 것이 있는 순열의 수와 같다. 또 서로 다른 $(n+r-1)$개에서 r개를 택하는 조합의 수와 같다.

❷ $_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$는 다음과 같이 두 가지 방법으로 증명할 수 있다.

[증명 1]

$_n\mathrm{H}_r$는 r개의 ●와 $(n-1)$개의 ▮를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같고, 이 수는 $(r+n-1)$개의 자리 중 r개의 자리를 뽑아 ●를 배열하고 나머지 자리에 $(n-1)$개의 ▮를 배열하는 경우의 수이므로 $_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이다.

[증명 2]

n개의 수 1, 2, 3, $\cdots$, n에서 중복을 허락하여 r개를 꺼낸 수를

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_r\ (1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_r\le n)$ $\cdots\cdots$ ①

이라 하고

$b_1=a_1,\ b_2=a_2+1,\ b_3=a_3+2,\ \cdots,$
$b_r=a_r+(r-1)$ $\cdots\cdots$ ②

이라고 하자. 그러면

$1\le b_1<b_2<b_3<\cdots<b_r\le n+r-1$ $\cdots\cdots$ ③

위에서 ①의 조건을 만족하는 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_r가 주어지면 ②를 적용하여 ③의 조건을 만족하는 b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_r가 결정되고, 반대로 ③의 조건을 만족하는 b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_r가 주어지면 ①의 조건을 만족하는 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_r가 결정된다.

따라서 ①의 조건을 만족하는 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_r를 뽑는 경우의 수는 ③의 조건을 만족하는 b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_r를 뽑는 경우의 수와 같다.

한편 ③의 조건을 만족하는 b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_r를 뽑는 방법의 수는 $(n+r-1)$개의 수에서 r개를 뽑는 경우의 수이므로 $_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이므로 $_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이다.

7

목표| 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\mathbf{6}$

8

목표| 중복조합을 이용하여 다항식을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 항의 개수는 a, b, c, d의 네 문자에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=\mathbf{84}$

교과서 34 쪽

1 예제 05 방정식 $x+y+z=6$의 음이 아닌 정수인 해의 개수를 구하여라.

음이 아닌 정수인 해이므로 0도 해가 될 수 있다. 즉, 어떤 문자는 하나도 뽑지 않아도 된다.

풀이 방정식 $x+y+z=6$의 한 쌍의 해 $x=2$, $y=3$, $z=1$을 x가 2개, y가 3개, z가 1개로 생각하면 $xxyyyz$로 나타낼 수 있다.
음이 아닌 정수인 해의 개수는 서로 다른 세 문자 x, y, z에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 해의 개수는

$$ {}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6=28 $$

답 28

문제 9 방정식 $x+y+z=9$의 양의 정수인 해의 개수를 구하여라.

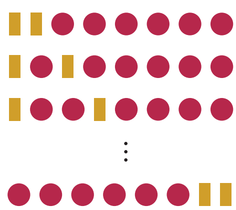
양의 정수인 해는 x, y, z를 각각 하나씩 뽑고 나머지에서 음이 아닌 정수인 해를 구하는 것과 같다.

창의 up 빨간 공, 노란 공, 파란 공이 각각 10개씩 들어 있는 주머니에서 7개의 공을 꺼낼 때, 각 색깔의 공이 적어도 한 개씩은 포함되도록 하는 경우의 수를 구하는 방법을 설명하여라.

단원 과제 앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.
4가지 종류의 염기 중 7개를 택하는 경우의 수를 구하여 보자.

본문 해설

❶ 음이 아닌 정수인 해는 해가 0인 경우와 양의 정수인 해를 말한다.
따라서 1을 ●라고 하면 $x+y+z=6$의 음이 아닌 정수인 해는 6개의 ●를 3개의 구역으로 나누어 나열하는 경우의 수와 같다. 즉, 구역을 구분하는 2개의 ▌과 6개의 ●를 다음 그림과 같이 나열하는 것이다.



이것은 ${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2$와 같다.

9

목표| 중복조합을 이용하여 일차방정식의 양의 정수인 해의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허락하여 9개를 택해야 한다.
이때 x, y, z는 양의 정수이므로 우선 x, y, z를 하나씩 택한 후 x, y, z에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 해의 개수는
${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\mathbf{28}$

창의 UP

출제 의도| 각 색깔의 공이 적어도 한 개씩 포함된다는 것은 방정식 $x+y+z=7$에서 미리 하나씩 뽑고 나머지를 음이 아닌 정수인 해를 구하는 것과 같은 방법으로 구할 수 있음을 알게 한다.

풀이| 주머니에서 꺼낸 빨간 공, 노란 공, 파란 공의 개수를 각각 a, b, c라고 하면
$a+b+c=7$, $a\ge1$, $b\ge1$, $c\ge1$
여기서 각 색깔의 공이 적어도 한 개씩은 포함되도록 하는 경우의 수를 구하는 것은 방정식 $a+b+c=7$의 양의 정수인 해의 개수를 구하는 것과 같다.
$a-1=A$, $b-1=B$, $c-1=C$라고 하면 A, B, C는 음이 아닌 정수이다.
이것을 주어진 방정식에 대입하여 정리하면
$A+B+C=4$
따라서 $a+b+c=7$의 양의 정수인 해는 $A+B+C=4$의 음이 아닌 정수인 해와 같으므로 구하는 경우의 수는
${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\mathbf{15}$

단원 과제

목표| 중복조합을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=\mathbf{120}$

교과서 35 쪽

중단원 기초

[해답 p.164]

수준별 학습

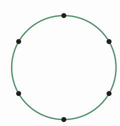
1 1부터 45까지의 자연수가 하나씩 적힌 45개의 공 중에서 1개의 공을 꺼낼 때, 7의 배수 또는 8의 배수가 적힌 공이 나오는 경우의 수를 구하여라. 01 경우의 수

2 다음 값을 구하여라. 02 순열 03 조합

(1) ${}_5P_2 \times 3!$ (2) ${}_4P_0 \times {}_6P_4$

(3) ${}_6C_0 \times {}_8C_3$ (4) ${}_{20}C_{17}$

3 오른쪽 그림과 같이 원의 둘레를 6등분한 점 위에 6개의 문자 a, b, c, d, e, f를 모두 써넣는 경우의 수를 구하여라. 02 순열 원순열



4 서로 다른 5통의 편지를 서로 다른 2개의 우체통에 넣는 경우의 수를 구하여라. 02 순열 중복순열

5 모양과 크기가 같은 4개의 태극기, 3개의 오륜기, 2개의 적십자기를 도로에 일렬로 세우는 경우의 수를 구하여라. 02 순열 같은 것이 있는 순열

중/단/원 기초

1

목표| 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 7의 배수가 적힌 공이 나오는 집합을 A라고 하면

$A=\{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42\}$

8의 배수가 적힌 공이 나오는 집합을 B라고 하면

$B=\{8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 40\}$

이때 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=6+5=\mathbf{11}$

2

목표| 순열과 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) ${}_5P_2\times 3!=(5\times 4)\times(3\times 2\times 1)$

$=\mathbf{120}$

(2) ${}_4P_0\times{}_6P_4=1\times(6\times 5\times 4\times 3)$

$=\mathbf{360}$

(3) ${}_6C_0\times{}_8C_3=1\times\left(\dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}\right)$

$=\mathbf{56}$

(4) ${}_{20}C_{17}={}_{20}C_3$

$=\dfrac{20\times 19\times 18}{3\times 2\times 1}$

$=\mathbf{1140}$

3

목표| 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 6개의 문자를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(6-1)!=5!=\mathbf{120}$

4

목표| 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_2\Pi_5=2^5=\mathbf{32}$

5

목표| 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 9개 중에서 서로 같은 것이 각각 4개, 3개, 2개가 있을 때, 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{9!}{4!3!2!}=\mathbf{1260}$

중/단/원 기본

1

목표| 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| A에서 B를 거쳐 D로 가는 경우의 수는 $2\times3=6$이므로 $x=6$
A에서 C를 거쳐 D로 가는 경우의 수는 $4\times2=8$이므로 $y=8$
따라서 $x+y=\mathbf{14}$

2

목표| 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 맨 앞과 맨 뒤에 남학생이 서는 경우의 수는 ${}_4P_2$
또 남은 남학생 2명과 여학생 3명이 일렬로 서는 경우의 수는 $5!$
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4P_2\times5!=\mathbf{1440}$

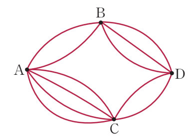
교과서 36 쪽

중단원 기본

[해답 p.164]

수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로가 있다. A에서 B를 거쳐 D로 가는 경우의 수를 x, A에서 C를 거쳐 D로 가는 경우의 수를 y라고 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

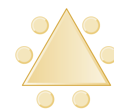


01 경우의 수

2 3명의 여학생과 4명의 남학생이 한 줄로 설 때, 맨 앞과 맨 뒤에 남학생이 서는 경우의 수를 구하여라.

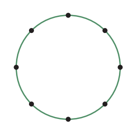
02 순열

3 오른쪽 그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 6명이 둘러앉는 경우의 수를 구하여라.



02 순열
원순열

4 오른쪽 그림과 같이 원의 둘레를 8등분한 점 중에서 4개의 점을 연결하여 만들 수 있는 사각형의 개수를 구하여라.



03 조합

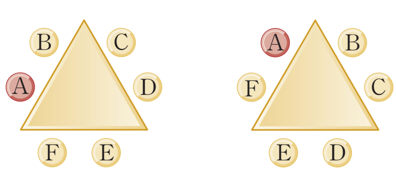
5 $(a+b+c)^6$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

03 조합
중복조합

3

목표| 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 6명을 원형으로 배열하는 원순열의 수는
$(6-1)!=5!$
이때 정삼각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $5!\times2=\mathbf{240}$

4

목표| 조합을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 어느 네 점도 일직선 위에 있지 않은 8개의 점 중에서 4개의 점을 연결하여 만들 수 있는 사각형의 개수는
${}_8C_4=\mathbf{70}$

5

목표| 중복조합을 이용하여 다항식을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 항의 개수는 a, b, c 세 문자에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\mathbf{28}$

중단원 실력

[해답 p.164]

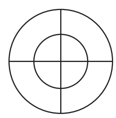
수준별 학습

1 영주는 서로 다른 120개의 블록을 가지고 있다. 블록은 다음 표와 같이 2가지 재질과 3가지 크기, 그리고 5가지 색과 4가지 모양으로 되어 있다. 그중에서 '플라스틱으로 된 중간 크기의 초록색인 원기둥 모양의 블록'과 단 두 가지만 일치하는 블록을 선택하는 경우의 수를 구하여라.

01 경우의 수

재질	플라스틱, 나무
크기	대, 중, 소
색	파랑, 빨강, 노랑, 초록, 보라
모양	삼각기둥, 사각기둥, 육각기둥, 원기둥

2 오른쪽 그림과 같은 원판에 서로 다른 8가지의 색을 모두 사용하여 8개의 각 영역을 칠하는 경우의 수를 구하여라. (단, 두 원의 중심은 같고 두 선분은 원의 중심에서 수직으로 만난다.)



02 순열 원순열

3 어느 건물에서는 출입을 통제하기 위하여 각 자리가 0 또는 1로 이루어진 8자리 문자열의 보안 카드를 사용하고 있는데, 보안 카드의 8자리 문자열에 포함된 1의 개수가 5개이거나 문자열의 처음 4자리가 0110이면 이 건물에 출입할 수 있다. 이 건물에 출입할 수 있는 서로 다른 보안 카드의 개수를 구하여라.

02 순열 03 조합

4 방정식 $w+x+y+z=9$의 음이 아닌 정수인 해의 개수를 구하여라.
(단, $w\ge0$, $x\ge1$, $y\ge2$, $z\ge0$)

03 조합 중복조합

중/단/원 실력

1

목표| 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| ① 재질 ② 크기 ③ 색 ④ 모양이라고 하면
①, ②만 일치하는 경우의 수는 $4\times3=12$
①, ③만 일치하는 경우의 수는 $2\times3=6$
①, ④만 일치하는 경우의 수는 $2\times4=8$
②, ③만 일치하는 경우의 수는 $1\times3=3$
②, ④만 일치하는 경우의 수는 $1\times4=4$
③, ④만 일치하는 경우의 수는 $1\times2=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$12+6+8+3+4+2=\mathbf{35}$

2

목표| 조합과 원순열을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 바깥쪽의 네 영역에 4가지 색을 칠하는 경우의 수는
${}_8C_4\times\frac{{}_4P_4}{4}=420$
이 경우 각각에 대하여 안쪽의 네 영역에 나머지 4가지 색을 칠하는 경우의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$420\times24=\mathbf{10080}$

3

목표| 중복순열과 조합을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 1의 개수가 5개인 경우의 수는
${}_8C_5=56$
처음 네 자리가 0110인 경우의 수는
${}_2\Pi_4=16$
처음 네 자리가 0110이면서 1의 개수가 5개인 경우의 수는 ${}_4C_3=4$
따라서 보안카드의 개수는
$56+16-4=\mathbf{68}$

4

목표| 중복조합을 이용하여 일차방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 해는 $w+x+y+z=6$의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같다.
이때 음이 아닌 정수인 해의 개수는 서로 다른 네 문자 w, x, y, z에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 해의 개수는
${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=\mathbf{84}$

2 분할과 이항정리

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 유한집합을 서로소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있게 한다.

② 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있게 한다.

③ 이항정리를 이해하게 한다.

④ 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 분할	집합의 분할
	자연수의 분할
02 이항정리	이항정리
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

들어가면서 서로 다른 n개를 몇 개의 부분으로 나누기만 하는 것을 분할이라 하고, 몇 개의 부분으로 나누어 각 사람에게 주는 것을 분배라고 한다. 분배는 순열과 조합을 이용하여 다양한 경우의 수를 구하였다.
이 단원에서는 모양과 크기가 같아 구분이 되지 않는 사탕을 같은 봉지에 나누어 담는 경우를 생각하게 하여 분할을 자연스럽게 이해할 수 있게 한다.

교과서 38 쪽

2 분할과 이항정리

사탕을 나누어 담아 보자.

설탕이나 엿을 끓였다가 식혀서 만드는 사탕은 종류가 매우 다양한데, 설탕을 빛깔이 변할 때까지 졸여서 만든 캐러멜(caramel), 먹을 때 아삭아삭 부서지고 이에 달라붙지 않는 드롭스(drops), 과즙이나 브랜디, 위스키 등이 들어간 봉봉(bonbon), 설탕 반죽을 탄산가스로 부풀린 후 견과류나 과일 조각을 섞어서 만든 누가(nougat) 등이 있다.

사탕은 B.C. 2000년경 이집트에서 처음 만들어졌는데, 그 당시는 과일 등을 벌꿀에 버무려서 만든 단 과자였다. 그 후 사탕수수로 만든 가루 설탕에 아카시아의 수액에서 얻은 아라비아고무를 섞어 로젠지(lozenge, 마름모꼴의 약용 드롭스)라는 것을 만들었는데, 이것이 사탕의 시조라고 할 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 45쪽

모양과 크기가 같은 사탕을 같은 종류의 봉지에 나누어 담는 경우의 수를 구할 수 있을까?

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 유한집합을 서로소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	상	유한집합을 서로소인 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	유한집합을 서로소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
	하	간단한 유한집합을 서로소인 집합의 합집합으로 나타낼 수 있다.
2. 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	상	자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 모든 방법의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 모든 방법의 수를 구할 수 있다.
	하	자연수를 두 개 또는 세 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있다.
3. 이항정리를 이해하고, 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.	상	이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	중	이항정리를 이용하여 항이 두 개인 식의 거듭제곱의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있다.
	하	이항정리를 말할 수 있다.

교과서 39 쪽

01 분할

● 유한집합을 서로소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 경우의 수를 구할 수 있다.
● 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 경우의 수를 구할 수 있다.

집합의 분할이란 무엇인가?

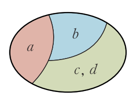
생각 열기 **자원봉사자**

자원봉사자는 사회 또는 공공의 이익을 위한 일을 자기 의지로 행하는 사람으로 이들의 봉사 활동은 보통 비영리 단체를 통하는 경우가 많다. 하지만 이와는 별도로 개인 또는 몇몇 사람들이 비교적 격식을 차리지 않고 자유롭게 봉사 활동을 펼치는 경우도 있다.

탐구 활동 **네 명의 학생 a, b, c, d가 여러 모둠으로 나뉘어 자원봉사를 하기로 하였다. 한 사람은 한 모둠에만 들어갈 수 있고 각 모둠에는 적어도 한 사람이 포함되어야 한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 네 명을 한 모둠으로 만드는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 네 명을 세 모둠으로 나누는 경우의 수를 구하여 보자.
3. 네 명을 다섯 모둠으로 나누는 경우의 수를 구하여 보자.

탐구 활동은 네 명의 학생을 원소로 하는 집합 $\{a, b, c, d\}$를 몇 개의 서로소인 부분집합으로 나누는 것과 같다.



예를 들어 $\{a\}\cup\{b\}\cup\{c, d\}$는 집합 $\{a, b, c, d\}$를 서로소인 세 부분집합으로 나눈 것이다.

이와 같이 주어진 집합을 몇 개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 것을 **집합의 분할**이라고 한다.

일반적으로 n개의 원소를 가지고 있는 집합을 $k(k\le n)$개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수를 기호

$$S(n, k)$$

로 나타낸다.

● 집합의 분할의 수를 제2종 스털링 수(Stirling numbers of the second kind)라고도 한다. 또 기호 $S(n, k)$에서 S는 스털링 수의 첫 글자에서 따온 것이다.

01 분할

소단원 지도 목표

① 집합의 분할의 뜻을 알게 한다.
② 유한집합을 서로소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.
③ 자연수의 분할의 뜻을 알게 한다.
④ 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 4명을 두 팀으로 나누는 방법은 1명과 3명으로 나누는 경우와 2명과 2명으로 나누는 경우가 있다. 실제 학생의 이름을 예로 들어 나누는 모든 방법을 생각해 보도록 유도한다.

2. 모양과 크기가 같은 사과 6개를 나누는 것은 순서를 생각하지 않고 1 이상 6 이하의 자연수의 합으로 나타내는 경우와 같음을 이해할 수 있도록 지도한다. 이때 수학 교구를 활용하면 더 좋은 효과를 얻을 수 있다.

새로 나온 용어와 기호

- 집합의 분할(集合 — 分割, partition of a set)
- 자연수의 분할(自然數 — 分割, partition of natural number)
- $S(n, k)$, $P(n, k)$

생각 열기 참/고/자/료

자원봉사자는 사회 또는 공공의 이익을 위한 일을 자기 의지로 행하는 사람으로 이들은 비영리단체를 통해서나 개인 또는 몇몇 사람들이 자유롭게 봉사 활동을 한다.
자원봉사자는 다양한 형태로 보상을 얻는다. 예를 들어 보람이나 경험 등의 정신적 보상이나 교통비나 식사비, 소정의 활동비 등을 제공받는 금전적 보상이 있을 수 있다. 그 밖에도 취업 또는 진학에 도움이 되는 경력을 쌓기 위한 목적에서 자원봉사를 하기도 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 네 명의 자원봉사자를 여러 개의 모둠으로 나누는 경우의 수를 구하는 과정을 통해 집합의 분할을 이해하게 하려는 것이다.

1. 네 명을 한 모둠으로 만드는 경우는 $\{a, b, c, d\}$의 **1**가지이다.

2. 네 명을 세 모둠으로 나누는 경우는
$\{a, b, (c, d)\}$, $\{a, c, (b, d)\}$, $\{a, d, (b, c)\}$,
$\{b, c, (a, d)\}$, $\{b, d, (a, c)\}$, $\{c, d, (a, b)\}$
의 **6**가지이다.

3. 네 명을 다섯 모둠으로 만드는 경우는 없다.

1

목표| 집합의 분할을 나타내는 기호 $S(n,\ k)$를 이해할 수 있게 한다.

풀이| 집합 $X=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$를 3개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수를 기호로 나타내면 $\boldsymbol{S(5,\ 3)}$이다.

2

목표| 집합의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 집합 X를 1개의 부분집합의 합집합으로 나타내면 $X=\{w,\ x,\ y,\ z\}$이므로

$S(4,\ 1)=1$

집합 X를 2개의 부분집합의 합집합으로 나타내면

$$\begin{aligned}X&=\{w\}\cup\{x,\ y,\ z\}\\&=\{x\}\cup\{w,\ y,\ z\}\\&=\{y\}\cup\{w,\ x,\ z\}\\&=\{z\}\cup\{w,\ x,\ y\}\\&=\{w,\ x\}\cup\{y,\ z\}\\&=\{w,\ y\}\cup\{x,\ z\}\\&=\{w,\ z\}\cup\{x,\ y\}\end{aligned}$$

이므로 $S(4,\ 2)=7$

집합 X를 3개의 부분집합의 합집합으로 나타내면

$$\begin{aligned}X&=\{w\}\cup\{x\}\cup\{y,\ z\}\\&=\{w\}\cup\{y\}\cup\{x,\ z\}\\&=\{w\}\cup\{z\}\cup\{x,\ y\}\\&=\{x\}\cup\{y\}\cup\{w,\ z\}\\&=\{x\}\cup\{z\}\cup\{w,\ y\}\\&=\{y\}\cup\{z\}\cup\{w,\ x\}\end{aligned}$$

이므로 $S(4,\ 3)=6$

집합 X를 4개의 부분집합의 합집합으로 나타내면

$X=\{w\}\cup\{x\}\cup\{y\}\cup\{z\}$이므로 $S(4,\ 4)=1$

따라서 집합 X의 분할의 수는

$$\begin{aligned}&S(4,\ 1)+S(4,\ 2)+S(4,\ 3)+S(4,\ 4)\\&=1+7+6+1\\&=\mathbf{15}\end{aligned}$$

교과서 40 쪽

따라서 n개의 원소를 가지고 있는 집합의 분할의 수는

$$S(n,\ 1)+S(n,\ 2)+\cdots+S(n,\ n)$$

이다.

보기 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$을 2개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수를 기호로 나타내면 $S(3,\ 2)$이다.

문제 1 집합 $X=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$를 3개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수를 기호로 나타내어라.

예제 01 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 집합 A의 분할의 수를 구하여라.

풀이 집합 A를 1개의 부분집합의 합집합으로 나타내면

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$

이므로 $S(3,\ 1)=1$

집합 A를 2개의 부분집합의 합집합으로 나타내면

$A=\{1\}\cup\{2,\ 3\}=\{2\}\cup\{1,\ 3\}=\{3\}\cup\{1,\ 2\}$

이므로 $S(3,\ 2)=3$

집합 A를 3개의 부분집합의 합집합으로 나타내면

$A=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}$

이므로 $S(3,\ 3)=1$

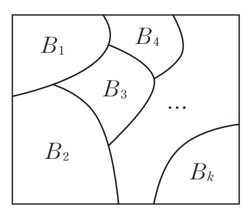
따라서 집합 A의 분할의 수는

$S(3,\ 1)+S(3,\ 2)+S(3,\ 3)=1+3+1=5$

답 5

문제 2 집합 $X=\{w,\ x,\ y,\ z\}$에 대하여 집합 X의 분할의 수를 구하여라.

지/도/자/료 $S(n,\ k)$의 정의



n개의 원소를 갖는 집합 A가 다음 그림과 같이 부분집합으로 나누어져 있다고 하자.

집합 A가

(i) $A=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k$이고

(ii) 모든 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$에 대하여 $B_i\neq\varnothing$이며

(iii) $i\neq j$인 모든 $i,\ j$에 대하여 $B_i\cap B_j=\varnothing$이면

$\{B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_k\}$를 집합 A의 분할(set partition)이라 하고 각 B_i를 이 분할의 블록(block)이라고 한다.

n개의 원소와 k개의 블록을 가진 집합의 분할의 수를 제2종 스털링 수(Stirling numbers of the second kind)라 하고 $S(n,\ k)$로 나타낸다. 특히 n개의 원소를 가진 집합의 모든 분할의 수를 벨 수(Bell number)라 하고 $B(n)$으로 나타낸다. 즉, 벨 수 $B(n)$은 다음과 같다.

$$B(n)=S(n,\ 1)+S(n,\ 2)+\cdots+S(n,\ n)$$

교과서 41 쪽

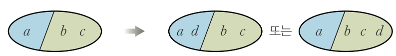
예제 02 세 명의 학생 a, b, c를 한 모둠 또는 두 모둠으로 나누는 경우를 이용하여 네 명의 학생 a, b, c, d를 두 모둠으로 나누는 분할의 수 $S(4,\ 2)$를 구하여라.

풀이 (i) 세 명의 학생 a, b, c를 한 모둠으로 나누는 경우의 수는 $S(3,\ 1)=1$이다. 이때 학생 d가 홀로 모둠을 이루면 네 명의 학생이 두 모둠을 이루므로 네 명의 학생이 두 모둠을 이루는 경우의 수는 1이다.

(ii) 세 명의 학생 a, b, c를 두 모둠으로 나누는 경우의 수는 다음 표와 같이 $S(3,\ 2)=3$이다.

모둠 나누기	
a	b, c
b	a, c
c	a, b

위의 표에서 각각의 경우에 학생 d가 들어갈 수 있는 경우는 2가지씩이므로 네 명의 학생이 두 모둠을 이루는 경우의 수는 $3\times2=6$이다.



(i), (ii)에 의하여 네 명의 학생을 두 모둠으로 나누는 분할의 수는

$$S(4,\ 2)=1+6=7$$

답 7

문제 3 네 명의 학생을 두 모둠 또는 세 모둠으로 나누는 경우를 이용하여 다섯 명의 학생을 세 모둠으로 나누는 분할의 수 $S(5,\ 3)$을 구하여라.

창의 up 조합을 이용하여 $S(4,\ 2)$를 구하는 방법을 설명하여라.

3

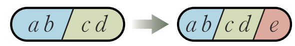
목표| 집합의 분할의 수를 이용하여 다른 집합의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 다섯 명의 학생을 a, b, c, d, e라고 하자.

(i) 네 명의 학생 a, b, c, d를 두 모둠으로 나누는 경우의 수는 다음 표와 같이 $S(4,\ 2)=7$

모둠 나누기	
a	b, c, d
b	a, c, d
c	a, b, d
d	a, b, c
a, b	c, d
a, c	b, d
a, d	b, c

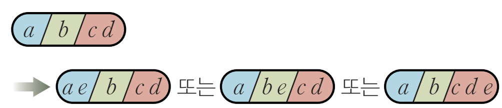
위의 표에서 각각의 경우에 학생 e가 홀로 모둠을 이루면 다섯 명의 학생이 세 모둠을 이루므로 다섯 명의 학생이 세 모둠을 이루는 경우의 수는 7이다.



(ii) 네 명의 학생 a, b, c, d를 세 모둠으로 나누는 경우의 수는 다음 표와 같이 $S(4,\ 3)=6$

모둠 나누기		
a	b	c, d
a	c	b, d
a	d	b, c
b	c	a, d
b	d	a, c
c	d	a, b

위의 표에서 각각의 경우에 학생 e가 들어갈 수 있는 경우는 3가지씩이므로 다섯 명의 학생이 세 모둠을 이루는 경우의 수는 $6\times3=18$



(i), (ii)에 의하여 다섯 명의 학생을 세 모둠으로 나누는 분할의 수는

$S(5,\ 3)=7+18=$ **25**

창의 UP

출제 의도| 조합을 이용하여 집합의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $4=1+3=2+2$이므로 네 명의 학생을 두 모둠으로 나누는 경우는 2가지이다.

(i) 두 모둠의 학생 수가 1명, 3명인 경우

$${}_4C_1\times{}_3C_3=4$$

(ii) 두 모둠의 학생 수가 2명, 2명인 경우

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$$

따라서 네 명의 학생을 두 모둠으로 나누는 분할의 수는

$S(4,\ 2)=4+3=$ **7**

본문 해설

❶ n명의 사람 1, 2, $\cdots$, n을 k개의 그룹으로 나누는 방법은 다음의 두 가지 경우가 있다.

[경우 1] n이 혼자서 1개의 그룹을 이루는 경우

이 경우는 1, 2, $\cdots$, $n-1$을 $(k-1)$개의 그룹 X_1, X_2, $\cdots$, X_{k-1}로 분할함으로써 k개의 그룹 X_1, X_2, $\cdots$, X_{k-1}, $\{n\}$을 얻을 수 있다. 이 경우의 분할의 수는 $S(n-1,\ k-1)$이다.

[경우 2] n이 다른 사람과 함께 1개의 그룹을 이루는 경우

이 경우는 1, 2, $\cdots$, $n-1$을 k개의 그룹 X_1, X_2, $\cdots$, X_k로 분할하고 n을 X_1, X_2, $\cdots$, X_k 중 어느 한 그룹에 포함시키면 된다. 이때 포함시키는 방법의 수는 k이므로 이 경우의 분할의 수는 $kS(n-1,\ k)$이다.

따라서 다음을 얻는다.

$$S(n,\ k)=S(n-1,\ k-1)+kS(n-1,\ k)$$

(단, $1<k<n$)

교과서 42 쪽

이제 $S(n, k)(1\le k\le n)$를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

예를 들어 $n=3$, $k=2$이면 $S(3, 2)$는 원소의 개수가 세 개인 집합 $A=\{1, 2, 3\}$을 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수이다.

따라서 $A=\{1\}\cup\{2, 3\}=\{2\}\cup\{1, 3\}=\{3\}\cup\{1, 2\}$이므로 $S(3, 2)=3$이다.

여기서 원소 3이 혼자서 한 개의 모둠을 이루는 경우는 $\{3\}\cup\{1, 2\}$이고, 이 경우 분할의 수는 3을 제외한 2개의 원소를 가진 집합을 1개의 모둠으로 분할하는 수와 같으므로 $S(2, 1)$이다.

원소 3이 다른 원소와 함께 한 개의 모둠을 이루는 경우는 $\{1\}\cup\{2, 3\}$, $\{2\}\cup\{1, 3\}$이고, 이 경우 분할의 수는 3을 제외한 2개의 원소를 가진 집합을 2개의 모둠으로 분할한 후 3을 둘 중 한 모둠에 포함시키는 것과 같으므로 $2S(2, 2)$이다.

따라서 $S(3, 2)=S(2, 1)+2S(2, 2)=1+2\cdot1=3$이다.

즉, 다음과 같은 규칙이 성립한다.

❶ $S(n, k)=S(n-1, k-1)+kS(n-1, k)(1<k<n)$

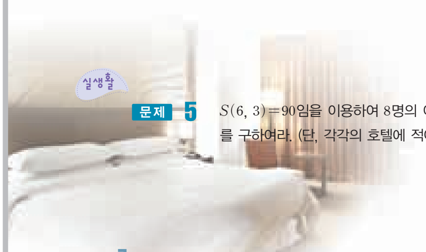
$$S(3, 2)=S(2, 1)+2S(2, 2)$$

−1 −1 −1

보기 $S(5,\ 2)=S(4,\ 1)+2S(4,\ 2)=1+2\cdot7=15$

문제 4 $S(5, 1)=1$, $S(5, 2)=15$임을 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $S(6, 2)$ (2) $S(7, 2)$



문제 5 $S(6, 3)=90$임을 이용하여 8명의 여행객을 3개의 호텔에 나누어 투숙하게 하는 경우의 수를 구하여라. (단, 각각의 호텔에 적어도 한 명의 여행객은 반드시 투숙한다.)

사고력 기르기

추론

의사소통

▶문제 해결

서로 다른 n개의 공을 같은 종류의 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 넣는 분할의 수를 기호로 나타내어 보자.

4

목표| 집합의 분할의 수의 성질을 이용하여 다른 집합의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $S(6,\ 2)=S(5,\ 1)+2S(5,\ 2)$
$=1+2\times15=\mathbf{31}$

(2) $S(7,\ 2)=S(6,\ 1)+2S(6,\ 2)$
$=1+2\times31=\mathbf{63}$

5

목표| 집합의 분할의 수의 성질을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 8명을 3개의 호텔에 나누어 투숙하게 하는 방법은 8명을 세 모둠으로 나누고, 각 모둠을 세 호텔로 구분해야 하므로 구하는 경우의 수는

$3!\times S(8,\ 3)=6\times\{S(7,\ 2)+3S(7,\ 3)\}=\mathbf{5796}$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 집합의 분할의 수를 이해하게 한다.

풀이| 구하는 경우의 수는 n개의 원소를 가지는 집합을 3개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수와 같으므로 $\boldsymbol{S(n,\ 3)}$이다.

지/도/자/료 집합의 분할

① n명을 k개의 서로 다른 방에 빈 방이 없게 배치하는 경우의 수: $S(n,\ k)k!$

② n통의 서로 다른 편지를 k개의 서로 다른 우체통에 넣는 경우의 수: k^n

③ 서로 다른 n명을 k개의 그룹으로 나누는 경우의 수: $S(n,\ k)$

④ n명을 k개 이하의 그룹으로 나누는 경우의 수: $S(n,\ 1)+S(n,\ 2)+\cdots+S(n,\ k)$

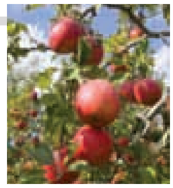
교과서 43 쪽

자연수의 분할이란 무엇인가?

탐구 활동

모양과 크기가 같은 사과 6개를 빈 봉지가 없도록 같은 종류의 봉지에 나누어 담으려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 6개의 사과를 두 개의 봉지에 나누어 담는 경우를 모두 나열하여 보자.
2. 6개의 사과를 세 개의 봉지에 나누어 담는 경우를 모두 나열하여 보자.



6개의 사과를 빈 봉지가 없도록 세 개의 봉지에 나누는 방법은 자연수 6을 순서를 무시하고 세 자연수의 합으로 나타내는 방법과 같다. 예를 들어 각각의 봉지에 2개, 1개, 3개를 넣었다면 이는 $6=2+1+3$으로 생각할 수 있다. 이때 $1+2+3$, $2+1+3$, $3+1+2$ 등은 모두 같은 것으로 본다.

한편 자연수 6을 6보다 작은 자연수의 합으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}6&=5+1=4+2=3+3\\&=4+1+1=3+2+1=2+2+2\\&=3+1+1+1=2+2+1+1\\&=2+1+1+1+1\\&=1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

이와 같이 주어진 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 **자연수의 분할**이라고 한다.

❶ 일반적으로 자연수 n을 k $(k\le n)$개의 자연수의 합

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k \text{ (단, } n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_k>0)$$

로 나타내는 자연수의 분할을 기호

$$\boldsymbol{P(n,\ k)}$$

로 나타낸다.

$P(n,\ k)$에서 P는 Partition(분할)의 첫 글자이다.

따라서 자연수 n의 분할의 수는

$$P(n,\ 1)+P(n,\ 2)+\cdots+P(n,\ n)$$

이다.

보기 $P(6,\ 1)=1$, $P(6,\ 2)=3$, $P(6,\ 3)=3$, $P(6,\ 4)=2$, $P(6,\ 5)=1$, $P(6,\ 6)=1$이므로 자연수 6의 분할의 수는 $1+3+3+2+1+1=11$이다.

문제 6 자연수 5의 분할의 수를 구하여라.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 모양과 크기가 같은 사과를 빈 봉지가 없도록 같은 종류의 봉지에 나누어 담는 경우를 통해 자연수의 분할을 이해하게 하려는 것이다.

1. 6개의 사과를 두 개의 봉지에 나누어 담는 경우는 각각의 봉지에 사과를
$\mathbf{(5,\ 1),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3)}$
개씩 넣는다.

2. 6개의 사과를 세 개의 봉지에 나누어 담는 경우는 각각의 봉지에 사과를
$\mathbf{(4,\ 1,\ 1),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2)}$
개씩 넣는다.

본문 해설

❶ 자연수 n을 k개의 자연수의 합

$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$

$(1\le k\le n,\ n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_k)$

로 나타내었을 때, 이 합을 n의 분할, k를 분할의 길이, n_k를 분할의 항이라고 한다.

일반적으로 자연수 n의 서로 다른 k개의 분할의 전체 개수를 $P(n,\ k)$로 나타낸다.

예를 들어

$6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$이므로

$P(6,\ 3)=3$이고

$7=5+1+1=4+2+1=3+3+1$

$=3+2+2$

이므로 $P(7,\ 3)=4$이다.

여기에서 조건 $n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_k\ge1$은 분할에서 순서를 고려하지 않는다는 것을 의미하며, 이를 무순서 분할이라고 한다.

6

목표 | 자연수의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | $P(5,\ 1)=1$, $P(5,\ 2)=2$, $P(5,\ 3)=2$, $P(5,\ 4)=1$, $P(5,\ 5)=1$이므로

자연수 5의 분할의 수는

$1+2+2+1+1=\mathbf{7}$

지/도/자/료

자연수의 분할을 다음과 같이 정의할 수도 있다.

자연수 n에 대하여 다음 두 조건을 만족하는

$\lambda=(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k)$를 n의 분할(partition)이라고 한다.

(i) $n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_k\ge1$ (단 $n_1,\ n_2,\cdots,\ n_k$는 자연수)

(ii) $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$

$\lambda=(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k)$가 n의 분할이면 각각의 n_i를 분할 λ의 부분(part)이라고 한다. 또 n의 모든 분할의 개수를 $P(n)$, k개의 부분을 가진 n의 분할의 수를 $P(n,\ k)$로 나타낸다.

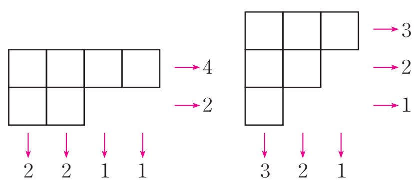
따라서

$$P(n)=P(n,\ 1)+P(n,\ 2)+\cdots+P(n,\ k)$$

이다.

본문 해설

❶ $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$가 n의 분할이라고 할 때, 첫 번째 행에 n_1개, 두 번째 행에 n_2개, …, k번째 행에 n_k개의 정사각형을 그린 그림을 페러 다이어그램(Ferrers diagram)이라고 한다.
예를 들어 다음 그림은 6의 분할인 (4, 2), (3, 2, 1)의 페러 다이어그램을 나타낸 것이다.



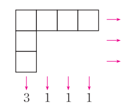
교과서 44 쪽

❶ 자연수 n에 대하여

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$$

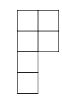
를 n의 분할이라고 하면 첫 번째 행에 n_1개, 두 번째 행에 n_2개, …, k번째 행에 n_k개의 정사각형 그림을 그릴 수 있다.
예를 들어 6의 한 분할인 $6=4+1+1$은 다음과 같은 그림으로 나타낼 수 있다.

분할을 나타내는 그림을 페러 다이어그램(Ferrers diagram)이라고 한다.

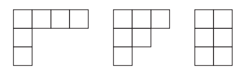


여기서 4, 1, 1은 그림의 각 가로줄에 있는 정사각형의 개수이다. 한편 이 그림의 각 세로줄의 정사각형의 개수는 각각 3, 1, 1, 1이므로 6은 $6=3+1+1+1$과 같이 분할되기도 한다. 이와 같이 주어진 분할을 그림으로 나타내면 분할을 보다 쉽게 이해할 수 있다.

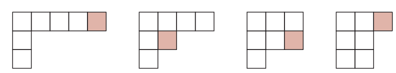
예제 03 자연수 6의 한 분할인 $2+2+1+1$을 오른쪽 그림과 같이 나타낼 때, $P(6, 3)$에 해당하는 그림에 정사각형 한 개를 더 그려 넣어 $P(7, 3)=4$임을 확인하여라.



풀이 $6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$이므로 $P(6, 3)$에 해당하는 그림은 오른쪽 그림과 같이 3가지이다.



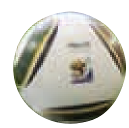
각각의 그림에 정사각형 한 개를 더 그리면 중복되는 그림을 제외하고 다음과 같이 모두 4가지임을 알 수 있다.



문제 7 분할의 수 $P(6, 4)$를 그림으로 나타내고, 이를 이용하여 $P(7, 4)$를 구하여라.

실생활

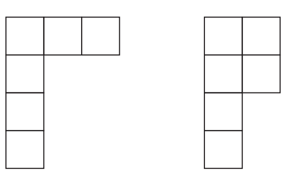
문제 8 2010년 월드컵에서는 공인구로 자블라니를 사용하였다. 자블라니 8개를 같은 종류의 상자 3개에 나누어 담는 경우의 수를 구하여라.
(단, 빈 상자는 없도록 한다.)



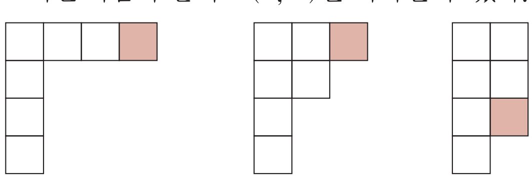
7

목표| 분할의 수를 그림으로 나타내고, 이를 이용하여 자연수의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $6=3+1+1+1=2+2+1+1$이므로 $P(6, 4)$를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



각각의 그림에 정사각형 한 개를 더 그려 넣어 그림을 그리면 다음과 같이 $P(7, 4)$를 나타낼 수 있다.



따라서 $P(7, 4)=\mathbf{3}$

8

목표| 자연수의 분할의 수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 똑같은 자블라니 8개를 같은 종류의 상자 3개에 나누어 담을 때, 빈 상자가 없도록 담는 경우의 수는 자연수 8을 3개의 자연수로 분할하는 것과 같으므로 $P(8, 3)$이다.
이때 자연수 8을 3개의 자연수로 분할하면

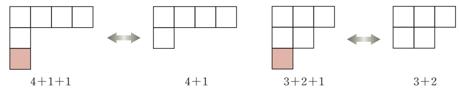
$$8=6+1+1=5+2+1=4+3+1$$
$$=4+2+2=3+3+2$$

이므로 구하는 경우의 수는
$P(8, 3)=\mathbf{5}$

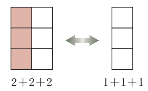
이제 $P(n, k)(1\le k\le n)$를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

예를 들어 $n=6$, $k=3$이면 $4+1+1$, $3+2+1$, $2+2+2$이므로 $P(6, 3)=3$이다.

여기서 1이 분할 중 하나인 경우는 $4+1+1$, $3+2+1$이고 각각 다음 그림과 같이 $4+1$, $3+2$로 대응된다. 이 경우 분할의 수는 $P(5, 2)$이다.



또 1이 분할 중 하나가 아닌 경우는 $2+2+2$이므로 다음 그림과 같이 $1+1+1$로 대응된다. 이 경우 분할의 수는 $P(3, 3)$이다.



따라서 $P(6, 3)=P(5, 2)+P(3, 3)=2+1=3$이다.

즉, 다음과 같은 규칙이 성립한다.

❶ $P(n, k)=P(n-1, k-1)+P(n-k, k)(1<k<n)$

$$P(6, 3)=P(5, 2)+P(3, 3)$$

보기 $P(7, 5)=P(6, 4)+P(2, 5)$이고 $P(2, 5)=0$이므로 $P(7, 5)=P(6, 4)=2$

문제 9 분할의 수 $P(8, 5)$를 구하여라.

창의 up 같은 종류의 연필 11자루를 같은 종류의 필통 3개에 넣을 때, 각 필통에 2자루 이상의 연필이 있도록 넣는 경우의 수는 같은 종류의 연필 5자루를 같은 종류의 필통 3개에 넣는 경우의 수와 같음을 설명하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

모양과 크기가 같은 사탕을 같은 종류의 봉지에 나누어 담는 경우의 수는 자연수의 분할의 수로 구할 수 있다. 모양과 크기가 같은 7개의 사탕을 같은 종류의 봉지 3개에 나누어 담으려고 할 때, 빈 봉지가 없도록 나누어 담는 경우의 수를 구하여 보자.

9

목표| 자연수의 분할의 수의 성질을 이용하여 다른 자연수의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(8, 5)=P(7, 4)+P(3, 5)$이고
$P(3, 5)=0$이므로 $P(8, 5)=P(7, 4)$
이때 자연수 7을 4개의 자연수로 분할하면
$7=4+1+1+1=3+2+1+1=2+2+2+1$
이므로 $P(8, 5)=P(7, 4)=\mathbf{3}$

창의 UP

출제 의도| 자연수의 분할을 활용하여 주어진 두 경우의 수가 같음을 설명할 수 있게 한다.

풀이| 11자루의 연필을 3개의 필통에 넣을 때, 2개 이상 있어야 하므로 각 필통에 2개씩 먼저 6개를 넣으면 5개가 남는다.
따라서 구하는 경우의 수는 5자루의 연필을 3개의 필통에 넣는 경우의 수와 같으므로
$P(5, 1)+P(5, 2)+P(5, 3)$
$=1+2+2=\mathbf{5}$

본문 해설

❶ 일반적으로 $P(n, k)=P(n-1, k-1)+P(n-k, k)$ $(1<k<n)$를 이용하여 $n=8$까지 $P(n, k)$를 구하면 다음과 같다.

n	$P(n,1)$	$P(n,2)$	$P(n,3)$	$P(n,4)$	$P(n,5)$	$P(n,6)$	$P(n,7)$	$P(n,8)$
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	0
4	1	2	1	1	0	0	0	0
5	1	2	2	1	1	0	0	0
6	1	3	3	2	1	1	0	0
7	1	3	4	3	2	1	1	0
8	1	4	5	5	3	2	1	1

단원 과제

목표| 자연수의 분할의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 모양과 크기가 같은 7개의 사탕을 같은 종류의 봉지 3개에 나누어 담는 경우의 수는 $P(7, 3)$과 같다.
따라서 $P(7, 3)=\mathbf{4}$

지/도/자/료 자연수의 분할

① n개의 바둑돌을 k개의 서로 다른 통에 빈 통이 없게 넣는 경우의 수: ${}_k\mathrm{H}_{n-k}$
② n개의 바둑돌을 k개의 서로 다른 통에 넣는 경우의 수(빈 통 허용): ${}_k\mathrm{H}_n$
③ 같은 n개의 바둑돌을 k개의 그룹으로 나누는 경우의 수: $P(n, k)$
④ 같은 n개의 바둑돌을 k개 이하의 그룹으로 나누는 경우의 수: $P(n, 1)+P(n, 2)+\cdots+P(n, k)$

02 이항정리

소단원 지도 목표

① 이항정리를 이해하게 한다.
② 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.
③ 파스칼의 삼각형을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이항정리의 일반항을 이용하여 전개식의 특정한 항을 구할 수 있게 한다. 특히 $(a+b)^2$, $(a+b)^3$의 전개 과정을 통하여 전개식의 규칙성을 발견할 수 있도록 지도한다.

2. 파스칼의 삼각형은 이항계수를 배열한 것이라는 사실을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 이항정리(二項定理, binomial theorem)
• 이항계수(二項係數, binomial coefficient)
• 파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)

교과서 46 쪽

02 이항정리

● 이항정리를 이해한다.
● 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

이항정리란 무엇인가?

탐구 활동 오른쪽 그림과 같은 개울을 건너려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자. (단, 첫째 돌과 둘째 돌, 셋째 돌과 넷째 돌, 다섯째 돌과 여섯째 돌을 짝을 지어서 각각의 짝지어진 2개의 돌 중 반드시 하나만 딛고 간다.)

1. 흰 돌 3개만 딛고 가는 경우는 몇 가지인가?
2. 흰 돌 2개와 검은 돌 1개를 딛고 가는 경우는 몇 가지인가?
3. 흰 돌 1개와 검은 돌 2개를 딛고 가는 경우는 몇 가지인가?

조합을 이용하여 다항식 $(a+b)^3$의 전개식을 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

❶ 다항식 $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$의 전개식에서 a^2b는 오른쪽 그림과 같이 $(a+b)^3$의 세 인수 $(a+b)$, $(a+b)$, $(a+b)$ 중 2개에서 a를 택하고, 남은 1개에서 b를 택하여 곱한 경우이므로 a^2b의 계수는 세 인수 $(a+b)$ 중 한 인수에서 b를 택하는 조합의 수 ${}_3\mathrm{C}_1=3$과 같다.

$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
a	a	b	a^2b
a	b	a	a^2b
b	a	a	a^2b

마찬가지 방법으로 a^3, ab^2, b^3의 계수는 각각 ${}_3\mathrm{C}_0$, ${}_3\mathrm{C}_2$, ${}_3\mathrm{C}_3$이 됨을 알 수 있다.

❷ 따라서 $(a+b)^3$의 전개식은 조합을 이용하여

$$(a+b)^3={}_3\mathrm{C}_0\,a^3+{}_3\mathrm{C}_1\,a^2b+{}_3\mathrm{C}_2\,ab^2+{}_3\mathrm{C}_3\,b^3$$

으로 나타낼 수 있다.

일반적으로 $(a+b)^n$의 전개식은 자연수 n에 대하여

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{개}}$$

이고, 이때 항 $a^{n-r}b^r$은 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개에서 b를 택하고 나머지 $(n-r)$개에서 a를 택하여 곱한 것이다. 즉, n개에서 r개를 택하는 조합의 수만큼 나타나므로 $a^{n-r}b^r$의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 흰 돌과 검은 돌이 있는 개울을 건너는 방법의 수를 구해 $(a+b)^3$의 전개식에서 각 항의 계수를 구하는 원리를 알게 하려는 것이다.

1. 흰 돌 3개만 딛고 가는 경우는  의 1가지이다.

2. 흰 돌 2개와 검은 돌 1개를 딛고 가는 경우는  의 3가지이다.

3. 흰 돌 1개와 검은 돌 2개를 딛고 가는 경우는  의 3가지이다.

본문 해설

❶ $(a+b)^3$의 전개식에서 a^2b가 되는 경우는 aab, aba, baa의 세 가지가 있다. 이는 3개의 인수 중에서 b를 한 개 택하고, 나머지는 a를 택하는 경우의 수이므로 ${}_3\mathrm{C}_1$이다. 이 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 배열하는 경우의 수 $\dfrac{3!}{2!1!}$과 같다.

❷ $(a+b)^3$을 전개하여 보자.
$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)=a^3+a^2B_1+aB_2+B_3$
라고 하면
$B_1=b_1+b_2+b_3$, $B_2=b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1$, $B_3=b_1b_2b_3$
이다. 이때 B_1, B_2, B_3은 b_1, b_2, b_3에서 각각 1개, 2개, 3개씩을 택하여 만든 곱의 합이므로 그 항의 개수는 각각 ${}_3\mathrm{C}_1$, ${}_3\mathrm{C}_2$, ${}_3\mathrm{C}_3$이 된다.
따라서 $b_1=b_2=b_3=b$로 놓으면 $(a+b)^3$의 전개식은 다음과 같다.
$(a+b)^3={}_3\mathrm{C}_0a^3+{}_3\mathrm{C}_1a^2b+{}_3\mathrm{C}_2ab^2+{}_3\mathrm{C}_3b^3$

따라서 $(a+b)^n$의 전개식은

P. 31 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 $(a+b)^n$의 전개식에서 a^rb^{n-r}과 $a^{n-r}b^r$의 계수는 같다.

❶ $$(a+b)^n={}_nC_0\,a^n+{}_nC_1\,a^{n-1}b+{}_nC_2\,a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_r\,a^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_n\,b^n$$

으로 나타낼 수 있다. 이것을 **이항정리**라고 한다.

$(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_nC_0,\ {}_nC_1,\ {}_nC_2,\ \cdots,\ {}_nC_r,\ \cdots,\ {}_nC_n$$

을 **이항계수**라 하고, $(r+1)$번째 항 ${}_nC_r\,a^{n-r}b^r$을 일반항이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **이항정리**

자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}(a+b)^n&={}_nC_0\,a^n+{}_nC_1\,a^{n-1}b+{}_nC_2\,a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_r\,a^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_n\,b^n\\&=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,a^{n-r}b^r\end{aligned}$$

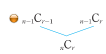
보기 $(a+b)^4={}_4C_0\,a^4+{}_4C_1\,a^3b+{}_4C_2\,a^2b^2+{}_4C_3\,ab^3+{}_4C_4\,b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

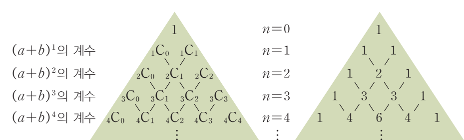
문제 1 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+3)^5$ (2) $(a-2b)^4$

(3) $(2a-3b)^4$ (4) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$

등식 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$를 이용하면 $(a+b)^n$의 전개식의 이항계수를 다음과 같이 삼각형 모양으로 나타낼 수 있다.





이와 같이 이항계수를 배열한 것을 **파스칼의 삼각형**이라고 한다.

한편 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 파스칼의 삼각형은 좌우 대칭임을 알 수 있다.

보기 $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

본문 해설

❶ 이항정리는 수학적 귀납법으로 다음과 같이 증명할 수 있다.

(i) $n=1$일 때

$(a+b)^1={}_1C_0\,a+{}_1C_1\,b=a+b$

이므로 이항정리가 성립한다.

(ii) $n=k$일 때

$(a+b)^k={}_kC_0\,a^k+{}_kC_1\,a^{k-1}b+\cdots+{}_kC_k b^k$

이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}&(a+b)^{k+1}\\&=(a+b)(a+b)^k\\&=(a+b)({}_kC_0\,a^k+{}_kC_1\,a^{k-1}b+\cdots+{}_kC_k\,b^k)\\&={}_kC_0a^{k+1}+({}_kC_0+{}_kC_1)a^kb+({}_kC_1+{}_kC_2)a^{k-1}b^2\\&\quad+\cdots+({}_kC_{k-1}+{}_kC_k)b^{k+1}\\&={}_{k+1}C_0\,a^{k+1}+{}_{k+1}C_1a^kb+{}_{k+1}C_2a^{k-1}b^2+\cdots+{}_{k+1}C_kb^{k+1}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때 이항정리가 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 이항정리가 성립한다.

❷ n이 자연수일 때, 이항정리

$(a+b)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}{}_nC_r\,a^{n-r}b^r$에서

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로 이항정리를

$(a+b)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}{}_nC_{n-r}\,a^{n-r}b^r$

로도 나타낼 수 있다.

1

목표| 이항정리를 이용하여 식을 전개할 수 있게 한다.

풀이| (1) 이항정리에 $n=5$, a 대신 x, b 대신 3을 대입한다.

$$\begin{aligned}&(x+3)^5\\&={}_5C_0\,x^5+{}_5C_1\,x^4\cdot3+{}_5C_2\,x^3\cdot3^2+{}_5C_3\,x^2\cdot3^3\\&\quad+{}_5C_4\,x\cdot3^4+{}_5C_5\,3^5\\&=\boldsymbol{x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243}\end{aligned}$$

(2) 이항정리에 $n=4$, b 대신 $-2b$를 대입한다.

$$\begin{aligned}&(a-2b)^4\\&={}_4C_0\,a^4+{}_4C_1\,a^3(-2b)+{}_4C_2\,a^2(-2b)^2\\&\quad+{}_4C_3\,a(-2b)^3+{}_4C_4(-2b)^4\\&=\boldsymbol{a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4}\end{aligned}$$

(3) 이항정리에 $n=4$, a 대신 $2a$, b 대신 $-3b$를 대입한다.

$$\begin{aligned}&(2a-3b)^4\\&={}_4C_0\,(2a)^4+{}_4C_1\,(2a)^3(-3b)+{}_4C_2\,(2a)^2(-3b)^2\\&\quad+{}_4C_3\cdot2a(-3b)^3+{}_4C_4\,(-3b)^4\\&=\boldsymbol{16a^4-96a^3b+216a^2b^2-216ab^3+81b^4}\end{aligned}$$

(4) 이항정리에 $n=3$, a 대신 x, b 대신 $\dfrac{1}{x}$을 대입한다.

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3&={}_3C_0\,x^3+{}_3C_1\,x^2\cdot\frac{1}{x}+{}_3C_2\,x\cdot\frac{1}{x^2}+{}_3C_3\,\frac{1}{x^3}\\&=\boldsymbol{x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}\end{aligned}$$

교과서 48 쪽

문제 2 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+b)^6$ (2) $(x-2)^5$

$(a+b)^n$의 전개식에서 $n\ge4$일 때는 각 항의 계수를 파스칼의 삼각형을 이용하여 구하는 것이 편리하다.

이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결하여 보자.

예제 01 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라.

풀이 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^7$의 전개식에서 일반항은 ${}_7C_r\,x^{7-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r={}_7C_r\,x^{7-r}\dfrac{2^r}{x^r}={}_7C_r\,2^rx^{7-2r}$

$7-2r=3$, $r=2$이므로 x^3의 계수는 ${}_7C_2\,2^2=84$

답 84

문제 3 $\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^6의 계수를 구하여라.

예제 02 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

증명 이항정리에 의하여 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+\cdots+{}_nC_n\,x^n$

이때 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$

문제 4 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n\,{}_nC_n=0$

(2) n이 홀수일 때, ${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

예제 2의 결과를 이용하여 원소의 개수가 n개인 집합의 부분집합의 개수를 구하는 방법을 설명하여 보자.

2

목표| 파스칼의 삼각형을 이용하여 식을 전개할 수 있게 한다.

풀이|

$n=0$: 1
$n=1$: 1 1
$n=2$: 1 2 1
$n=3$: 1 3 3 1
$n=4$: 1 4 6 4 1
$n=5$: 1 5 10 10 5 1
$n=6$: 1 6 15 20 15 6 1
⋮

(1) $(a+b)^6$

$=\mathbf{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$

(2) $(x-2)^5$

$=x^5+5x^4\cdot(-2)+10x^3\cdot(-2)^2+10x^2\cdot(-2)^3+5x\cdot(-2)^4+(-2)^5$

$=\mathbf{x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32}$

3

목표| 이항정리를 이용하여 전개식의 항의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r\,(x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{3}{x}\right)^r={}_6C_r\,(-3)^rx^{12-3r}$

$12-3r=6$에서 $r=2$

따라서 x^6의 계수는 ${}_6C_2(-3)^2=\mathbf{135}$

4

목표| 이항정리를 이용하여 조합의 수에 관한 등식을 증명할 수 있게 한다.

증명| (1) 이항정리에 의하여

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+{}_nC_3\,x^3+\cdots+{}_nC_n\,x^n$

이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(1-1)^n={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n\,{}_nC_n$

따라서 ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n\,{}_nC_n=0$

(2) $2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n$ …… ①

(1)에 의하여

$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+{}_nC_{n-1}-{}_nC_n$ …… ②

①+②: $2^n=2({}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1})$

${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$ …… ③

①−③: $2^n-2^{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$

$2^{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$

따라서

${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

사고력 기르기 추론

출제 의도| 이항정리를 이용하여 부분집합의 개수를 구하는 방법을 설명할 수 있게 한다.

풀이| 원소의 개수가 n개인 집합에 대하여 원소의 개수가 r개인 부분집합의 개수는 ${}_nC_r$개이므로 원소의 개수가 n개인 집합의 부분집합의 개수는

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

교과서 49 쪽

중단원 기초

[해답 p.165]

수준별 학습

1 다음 중에서 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 분할인 것을 모두 찾아라.

01 분할 집합의 분할

㉠ $\{1, 5\}, \{2\}, \{3\}$	㉡ $\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}$
㉢ $\{1, 3, 4\}, \{2\}, \{5\}$	㉣ $\{1, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}$

2 원소가 5개인 집합을 두 개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수 $S(5, 2)$를 구하여라.

01 분할 집합의 분할

3 자연수 8을 네 개의 자연수의 합으로 나타내는 분할의 수 $P(8, 4)$를 구하여라.

01 분할 자연수의 분할

4 다항식 $(x+y)^9$의 전개식에서 x^4y^5의 계수를 구하여라.

02 이항정리

5 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음 식을 전개하여라.

02 이항정리

(1) $(a-b)^4$ (2) $(x+2)^5$

중/단/원 기초

1

목표| 집합의 분할의 뜻을 알게 한다.

풀이| 집합 X를 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나눈 것을 찾으면 ㉡, ㉢이다.

2

목표| 집합의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $5=1+4=2+3$이므로 다음의 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) 두 집합의 원소가 각각 1개, 4개인 경우:

$_5C_1\times{}_4C_4=5$

(ii) 두 집합의 원소가 각각 2개, 3개인 경우:

$_5C_2\times{}_3C_3=10$

(i), (ii)에서 $S(5, 2)=5+10=\mathbf{15}$

3

목표| 자연수의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 8을 네 개의 자연수로 분할하면

$8=5+1+1+1$

$=4+2+1+1$

$=3+3+1+1$

$=3+2+2+1$

$=2+2+2+2$

이므로 $P(8, 4)=\mathbf{5}$

4

목표| 이항정리를 이용하여 전개식의 항의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $(x+y)^9$의 전개식에서 일반항은 $_9C_r x^{9-r}y^r$이다.

$r=5$이므로 x^4y^5의 계수는

$_9C_5=\mathbf{126}$

5

목표| 파스칼의 삼각형을 이용하여 식을 전개할 수 있게 한다.

풀이|

$n=0$ 1

$n=1$ 1 1

$n=2$ 1 2 1

$n=3$ 1 3 3 1

$n=4$ 1 4 6 4 1

$n=5$ 1 5 10 10 5 1

⋮ ⋮

(1) $(a-b)^4$

$=a^4+4a^3\cdot(-b)+6a^2\cdot(-b)^2+4a\cdot(-b)^3+(-b)^4$

$=\boldsymbol{a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4}$

(2) $(x+2)^5$

$=x^5+5x^4\cdot2+10x^3\cdot2^2+10x^2\cdot2^3+5x\cdot2^4+2^5$

$=\boldsymbol{x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32}$

교과서 50 쪽

중단원 기본

[해답 p.166]

수준별 학습

1 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) 집합 X를 공집합이 아닌 서로소인 세 개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수

(2) 집합 X를 각각 두 개의 원소를 가지고 있는 세 개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수

01 분할 집합의 분할

2 모양과 크기가 같은 7개의 귤을 같은 종류의 상자 3개에 나누어 담으려고 한다. 이때 3개 이하의 상자에 담는 경우의 수를 a, 빈 상자가 없도록 3개의 상자에 담는 경우의 수를 b라고 할 때, ab의 값을 구하여라.

01 분할 자연수의 분할

3 다항식 $(x-a)^5$의 전개식에서 x의 계수와 상수항의 합이 0일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

02 이항정리

4 $\left(ax^2+\dfrac{2}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2의 계수가 6일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

02 이항정리

5 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=512$일 때, 자연수 n의 값을 구하여라.

02 이항정리

중/단/원 기본

1

목표| 집합의 분할을 이해하고, 집합의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구하는 경우의 수는 $S(6, 3)$이다.

$6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$이므로 다음의 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) 세 집합의 원소가 각각 4개, 1개, 1개인 경우: ${}_6C_4\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{2!}=15$

(ii) 세 집합의 원소가 각각 3개, 2개, 1개인 경우: ${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=60$

(iii) 세 집합의 원소가 각각 2개, 2개, 2개인 경우: ${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{3!}=15$

(i), (ii), (iii)에서

$S(6, 3)=15+60+15=\mathbf{90}$

(2) 집합 X를 각각 두 개의 원소를 가지고 세 개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는

$\dfrac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{3!}=\mathbf{15}$

2

목표| 자연수의 분할을 이해하고, 자연수의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 7개의 귤을 3개 이하의 상자에 담는 경우의 수는 $P(7, 1)+P(7, 2)+P(7, 3)$이다.

이때 자연수 7을 분할하면

$7=1+6=2+5=3+4$

$=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

에서 $P(7, 1)+P(7, 2)+P(7, 3)=1+3+4=8$

이므로 $a=8$

또 7개의 귤을 빈 상자가 없도록 3개의 상자에 나누어 담는 경우의 수는 $P(7, 3)=4$이므로 $b=4$

따라서 $ab=\mathbf{32}$

3

목표| 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $(x-a)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}(-a)^r=(-a)^r{}_5C_r x^{5-r}$

x의 계수는 $r=4$이므로 $(-a)^4{}_5C_4=5a^4$

또 상수항은 $r=5$이므로 $(-a)^5=-a^5$

이때 x의 계수와 상수항의 합이 0이므로

$5a^4-a^5=-a^4(a-5)=0$

따라서 a는 양수이므로 $a=\mathbf{5}$

4

목표| 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\left(ax^2+\dfrac{2}{x}\right)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4C_r\,(ax^2)^{4-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r={}_4C_r\,a^{4-r}\cdot 2^r\cdot x^{8-3r}$

$8-3r=2$에서 $r=2$이므로 x^2의 계수는 $24a^2$

$24a^2=6$이고, a는 양수이므로 $a=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

5

목표| 이항정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$2^n=512=2^9$에서 $n=\mathbf{9}$

교과서 51 쪽

중단원 실력

[해답 p.166]

수준별 학습

1 30030을 1보다 큰 세 자연수의 곱으로 표현하는 경우의 수를 구하여라.
(단, 곱하는 순서는 무시한다.)

01 분할
집합의 분할

2 자연수 8에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 3개 이하의 자연수의 합으로 나타내는 분할의 수

(2) 3 이하의 자연수의 합으로 나타내는 분할의 수

01 분할
자연수의 분할

3 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라.

02 이항정리

4 $a_n={}_n\mathrm{C}_0+\frac{1}{4}{}_n\mathrm{C}_1+\left(\frac{1}{4}\right)^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n{}_n\mathrm{C}_n$일 때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

02 이항정리

5 서로 다른 색상의 색연필 31자루 중에서 16자루 이상을 택하여 그림을 색칠하려고 한다. 이때 색연필을 택하는 경우의 수를 구하여라.

02 이항정리

중/단/원 실력

1

목표| 집합의 분할을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $30030=2\times3\times5\times7\times11\times13$

따라서 구하는 수는 집합 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$을 공집합이 아닌 서로소인 3개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같으므로 $S(6,\ 3)=\mathbf{90}$

2

목표| 자연수의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $8=7+1=6+2=5+3=4+4$

$=6+1+1=5+2+1=4+3+1=3+3+2$

$=4+2+2$

$=5+1+1+1=4+2+1+1=3+3+1+1$

$=3+2+2+1=2+2+2+2$

$=4+1+1+1+1$

$=3+2+1+1+1$

$=2+2+2+1+1$

$=3+1+1+1+1+1$

$=2+2+1+1+1+1$

$=2+1+1+1+1+1+1$

$=1+1+1+1+1+1+1+1$

(1) $P(8,\ 1)+P(8,\ 2)+P(8,\ 3)$

$=1+4+5=\mathbf{10}$

(2) 위에서 빨간색 동그라미 표시된 것과 같으므로 구하는 분할의 수는 **10**이다.

3

목표| 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r\,x^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r\,x^{n-2r}$

$n-2r=3\ (n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$에서 $n=2,\ 4,\ 6$일 때, x^3항은 존재하지 않는다.

$n=3,\ 5$일 때, $n-2r=3$을 만족시키는 r의 값은 각각 0, 1이므로 x^3의 계수는

${}_3\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1=1+5=\mathbf{6}$

4

목표| 이항정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $a_n=\left(1+\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{5}{4}\right)^n$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k=\frac{\frac{4}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{4}{5}}=\mathbf{4\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}}$$

5

목표| 이항정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 색상의 색연필 31자루에서 16자루 이상을 선택하는 경우의 수는

${}_{31}\mathrm{C}_{16}+{}_{31}\mathrm{C}_{17}+{}_{31}\mathrm{C}_{18}+\cdots+{}_{31}\mathrm{C}_{31}$

${}_{31}\mathrm{C}_0+{}_{31}\mathrm{C}_1+{}_{31}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{31}\mathrm{C}_{15}$

$={}_{31}\mathrm{C}_{31}+{}_{31}\mathrm{C}_{30}+{}_{31}\mathrm{C}_{29}+\cdots+{}_{31}\mathrm{C}_{16}$이고,

${}_{31}\mathrm{C}_0+{}_{31}\mathrm{C}_1+{}_{31}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{31}\mathrm{C}_{31}=2^{31}$이므로

${}_{31}\mathrm{C}_{16}+{}_{31}\mathrm{C}_{17}+{}_{31}\mathrm{C}_{18}+\cdots+{}_{31}\mathrm{C}_{31}=\frac{1}{2}\cdot2^{31}=\mathbf{2^{30}}$

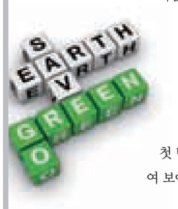
교과서 52 쪽

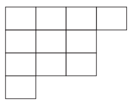
수행 과제

영 다이어그램과 영 타블로

영 다이어그램(Young diagram)이란 위의 가로줄의 칸의 수가 아래의 가로줄의 칸의 수보다 많거나 같은 도형을 말한다. 영 타블로(Young tableau)란 영 다이어그램에서 가로줄을 따라 오른쪽으로 가면서 숫자가 커지거나 같게, 세로줄을 따라 아래로 가면서 숫자가 커지게 주어진 자연수를 채워 넣은 것을 말한다.

다음 그림의 영 다이어그램에 숫자 1, 2, 3, 4를 채워 넣어 영 타블로를 만들려고 한다.





〈영 다이어그램〉

1	1	1	2
2	2	3	
3	4	4	
4			

〈영 타블로〉

첫 번째 세로줄에는 반드시 (1, 2, 3, 4)를 채워 넣어야 한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보아라.

| 과 제 | 1 두 번째 세로줄을 채우는 경우를 모두 적어 보아라.

| 과 제 | 2 두 번째 세로줄을 (1, 3, 4)로 채웠을 때, 영 타블로를 완성하는 경우의 수를 구하여 보아라.

| 과 제 | 3 영 타블로를 완성하는 모든 경우의 수를 구하여 보아라.

교과서 53 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 순열과 조합

경우의 수

(1) 합의 법칙: 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$$m+n$$

(2) 곱의 법칙: 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는

$$m\times n$$

순열

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

원순열

서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_n}{n}=(n-1)!$$

중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열의 수는

$${}_n\Pi_r=n^r$$

같은 것이 있는 순열

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!}\ (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

조합

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

중복조합

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

2 분할과 이항정리

집합의 분할

n개의 원소를 가지고 있는 집합을 k $(k\le n)$개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 것을 집합의 분할이라 하고, 이 분할의 수를 기호로 $S(n, k)$와 같이 나타낸다.

$$S(n, k)=S(n-1, k-1)+kS(n-1, k)$$

자연수의 분할

자연수 n을 k $(k\le n)$개의 자연수의 합

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k\ (\text{단, } n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_k>0)$$

와 같이 나타내는 것을 자연수의 분할이라 하고, 이 분할의 수를 기호로 $P(n, k)$와 같이 나타낸다.

$$P(n, k)=P(n-1, k-1)+P(n-k, k)$$

이항정리

자연수 n에 대하여

$$(a+b)^n$$
$$={}_n\mathrm{C}_0\,a^n+{}_n\mathrm{C}_1\,a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2\,a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\,b^n$$
$$=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r$$

용어와 기호 합의 법칙, 곱의 법칙, 순열, 계승, 원순열, 중복순열, 조합, 중복조합, 집합의 분할, 자연수의 분할, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, ${}_n\mathrm{P}_r$, $n!$, ${}_n\Pi_r$, ${}_n\mathrm{C}_r$, ${}_n\mathrm{H}_r$, $S(n, k)$, $P(n, k)$

수행 과제

● **수행 과제 의도**

두 번째 세로줄을 채우는 경우를 나누어 영 타블로를 완성하는 경우의 수를 구하기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)

과제 2 _풀이

세 번째 세로줄은 (1, 3, 4) 또는 (2, 3, 4)로 채워야 한다. 세 번째 세로줄이 (1, 3, 4)인 경우 네 번째 세로줄은 (1), (2), (3), (4)의 4가지가 가능하고, 세 번째 세로줄이 (2, 3, 4)인 경우 네 번째 세로줄은 (2), (3), (4)의 3가지가 가능하다. 따라서 구하는 경우의 수는

$4+3=\mathbf{7}$

과제 3 _풀이

(i) 두 번째 세로줄을 (1, 2, 3)으로 채웠을 때, 세 번째 세로줄은 (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4) 중 하나로 채워야 한다.
세 번째 세로줄이 (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4) 중 하나인 경우 네 번째 세로줄은 (1), (2), (3), (4)의 4가지가 가능하고, 세 번째 세로줄이 (2, 3, 4)인 경우 네 번째 세로줄은 (2), (3), (4)의 3가지가 가능하다.
따라서 영 타블로를 완성하는 경우의 수는
$3\times4+3=15$

(ii) 두 번째 세로줄을 (1, 2, 4)로 채웠을 때, 세 번째 세로줄은 (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4) 중 하나로 채워야 한다. 세 번째 세로줄이 (1, 2, 4), (1, 3, 4) 중 하나인 경우 네 번째 세로줄은 (1), (2), (3), (4)의 4가지가 가능하고, 세 번째 세로줄이 (2, 3, 4)인 경우 네 번째 세로줄은 (2), (3), (4)의 3가지가 가능하다. 따라서 영 타블로를 완성하는 경우의 수는
$2\times4+3=11$

(iii) 두 번째 세로줄을 (1, 3, 4)로 채웠을 때, 영 타블로를 완성하는 경우의 수는 과제 2에서 구한 것과 같이 7이다.

교과서 54 쪽

대/단/원 평가 문제

I. 순열과 조합

선택형

1 두 개의 주사위 A, B를 던질 때, 나온 눈의 수의 차가 3 이상인 경우의 수는?

① 6 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 12

2 남학생 3명과 여학생 2명을 일렬로 세울 때, 여학생끼리 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수는?

① 60 ② 64 ③ 68
④ 72 ⑤ 76

3 3쌍의 부부가 6인용 원탁에 둘러앉아 식사를 하려고 한다. 이때 부부끼리 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

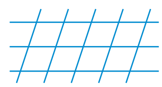
4 오른쪽 그림과 같이 앞면과 뒷면이 서로 다른 단추가 4개 있다. 4개의 단추를 모두 늘어놓는 경우의 수는? (단, 모두 찡그린 표정인 경우는 제외한다.)

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

5 세 문자 a, b, c를 각각 2번, 3번, 2번씩 사용하여 7개의 문자로 된 문자열을 만들려고 한다. 만들 수 있는 서로 다른 문자열의 개수는?

① 210 ② 420 ③ 840
④ 1680 ⑤ 3360

6 오른쪽 그림과 같이 3개의 평행선과 5개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이들 평행선으로 이루어지는 모든 평행사변형의 개수는?



① 30 ② 40 ③ 50
④ 60 ⑤ 70

7 부등식 $x+y+z<5$를 만족시키는 양의 정수인 해의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

8 원소가 5개인 집합을 4개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수는?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 24

(iv) 두 번째 세로줄을 (2, 3, 4)로 채웠을 때, 세 번째 세로줄은 (2, 3, 4)로 채워야 한다.
이때 네 번째 세로줄은 (2), (3), (4)의 3가지가 가능하므로 영 타블로를 완성하는 경우의 수는 3이다.

따라서 영 타블로를 완성하는 모든 경우의 수는

$15+11+7+3=$**36**

대/단/원 평가 문제

1

목표| 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 나온 눈의 수의 차가 3 이상인 경우는 3, 4, 5이다.

눈의 수의 차가 3인 경우는

(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지,

눈의 수의 차가 4인 경우는 (1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지이다.

눈의 수의 차가 5인 경우는 (1, 6), (6, 1)의 2가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6+4+2=12$

답 ⑤

2

목표| 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 여학생끼리 이웃하지 않도록 세우는 경우는 먼저 남자를 일렬로 세우고 남자 양 끝 및 사이사이에 여자 2명을 세우는 방법과 같다.

남학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수 $3!$이고

$\vee\boxed{남}\vee\boxed{남}\vee\boxed{남}\vee$

남학생 양 끝과 사이사이의 4개의 자리 중 2자리에 여학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times{}_4P_2=72$

답 ④

3

목표| 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 각 쌍을 묶어서 세 사람으로 생각하면 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!$이고

세 쌍의 부부가 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$2!\times8=16$

답 ③

4

목표| 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 경우의 수는

${}_2\Pi_4-1=2^4-1=15$

답 ③

5

목표| 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 7개의 문자 중에서 같은 문자가 각각 2개, 3개, 2개씩 있을 때 7개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

$\dfrac{7!}{2!3!2!}=210$

답 ①

6

목표| 조합을 이용하여 평행사변형의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 평행선으로 이루어지는 모든 평행사변형의 개수는

${}_3C_2\times{}_5C_2=30$

답 ①

7

목표| 중복조합을 이용하여 부등식을 만족시키는 양의 정수인 해의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| x, y, z가 양의 정수인 해이므로

$x+y+z\geq 3$

주어진 조건에 의하여 $3\leq x+y+z<5$이므로

$x+y+z=3$ 또는 $x+y+z=4$에 대하여 양의 정수인 해의 개수를 구하면 된다.

(i) $x+y+z=3$에서 양의 정수인 해의 개수는

${}_3H_0=1$

(ii) $x+y+z=4$에서 양의 정수인 해의 개수는

${}_3H_1={}_3C_1=3$

따라서 해의 개수는 $1+3=4$

답 ②

8

목표| 집합의 분할의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 경우의 수는 $S(5,\ 4)$이다.

$5=2+1+1+1$이므로 원소 5개인 집합을 원소가 각각 2개, 1개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{3!}=10$

답 ③

교과서 55 쪽

[해답 p.166]

9 다항식

$(1+x+\cdots+x^7)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6)$

의 전개식에서 x^7의 계수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

10 11^{11}을 100으로 나눈 나머지는?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

서답형

11 ${}_nC_3=2\cdot{}_nP_2$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

12 남학생 5명, 여학생 5명이 원탁에 둘러앉을 때, 남학생과 여학생이 교대로 앉는 경우의 수를 구하여라.

13 사과 주스 10병을 같은 종류의 상자 4개에 나누어 담아 포장하려고 한다. 빈 상자가 없도록 나누어 담는 경우의 수를 구하여라.

14 $N=69^5+5\cdot 69^4+10\cdot 69^3+10\cdot 69^2+5\cdot 69+1$의 약수의 개수를 구하여라.

|서|술|형|

15 현수는 MP3 플레이어에 5개의 곡 A, B, C, D, E를 저장하려고 한다. 곡이 재생되는 순서를 정하려고 할 때, A가 처음에 오지 않고, E가 마지막에 오지 않도록 하는 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 자연수 n에 대하여

$f(n)=\sum_{k=1}^{n}({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1})$

일 때, $f(5)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

9

목표| 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 번째 식은 x^2, 세 번째 식은 x^3을 거듭제곱하여 더한 것이므로 x^7의 계수는 8이다. 즉, x의 차수를 고려하여 7을 세 수로 분할하는 경우를 가진 수에서 순서쌍으로 나타내면 다음과 같이 8가지이다.

$(7,\ 0,\ 0)$, $(5,\ 2,\ 0)$, $(4,\ 0,\ 3)$, $(3,\ 4,\ 0)$,
$(2,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 6,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 6)$, $(0,\ 4,\ 3)$

답 ⑤

10

목표| 이항정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $11^{11}=(1+10)^{11}$

$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1\cdot 10+{}_{11}C_2\cdot 10^2+\cdots+{}_{11}C_{11}\cdot 10^{11}$

셋째항 이후로는 100으로 나누어떨어진다.

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1\cdot 10=1+110=111$

이므로 100으로 나눈 나머지는 11

답 ②

11

목표| 순열과 조합의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| ${}_{n}\mathrm{C}_{3}=2\cdot{}_{n}\mathrm{P}_{2}$에서

$$\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times2\times1}=2n(n-1)$$

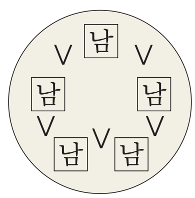
$\dfrac{n-2}{6}=2$이므로 $\quad n=14$

답 14

12

목표| 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 남학생 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!$이고, 남학생 사이사이의 5개의 자리에 여학생 5명을 앉히는 경우의 수는 ${}_{5}\mathrm{P}_{5}$이다.



따라서 구하는 방법의 수는

$4!\times{}_{5}\mathrm{P}_{5}=2880$

답 2880

13

목표| 자연수의 분할의 수를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 사과 주스 10병을 같은 종류의 상자 4개에 빈 상자가 없도록 나누어 담는 경우의 수는 자연수 10을 4개의 자연수로 분할하는 것과 같으므로 $P(10,\ 4)$이다.

$$\begin{aligned}10&=7+1+1+1=6+2+1+1\\&=5+3+1+1=5+2+2+1\\&=4+4+1+1=4+3+2+1\\&=4+2+2+2=3+3+3+1\\&=3+3+2+2\end{aligned}$$

이므로 구하는 경우의 수는 $\quad P(10,\ 4)=9$

답 9

14

목표| 이항정리와 곱의 법칙을 이용하여 약수의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $N=69^5+5\cdot69^4+10\cdot69^3+10\cdot69^2+5\cdot69+1$

$\quad=(69+1)^5=70^5=2^5\cdot5^5\cdot7^5$

따라서 구하는 약수의 개수는

$(5+1)(5+1)(5+1)=6^3=216$

답 216

15

목표| 순열을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 5개의 곡의 순서를 정하는 경우의 수는

$5!=120$

A가 처음에 오는 경우의 수는 A□□□□에서

$4!=24$

E가 마지막에 오는 경우의 수는 □□□□E에서

$4!=24$

A가 처음에 오고, E가 마지막에 오는 경우의 수는

A□□□E에서 $\quad 3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-(24+24-6)=78$

답 78

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	5개의 곡의 순서를 정하는 경우의 수 구하기	20%
	A가 처음에 오는 경우의 수 구하기	20%
	E가 마지막에 오는 경우의 수 구하기	20%
	A가 처음에 오고, E가 마지막에 오는 경우의 수 구하기	20%
답 구하기	A가 처음에 오지 않고, E가 마지막에 오지 않는 경우의 수 구하기	20%

16

목표| 이항정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| ${}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n-1}$에서

${}_{2k}\mathrm{C}_{1}+{}_{2k}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{2k}\mathrm{C}_{2k-1}=2^{2k-1}$이므로

$f(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}2^{2k-1}$

따라서 $\quad f(5)=2^1+2^3+2^5+2^7+2^9=682$

답 682

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	${}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n-1}$을 이용하여 ${}_{2k}\mathrm{C}_{1}+{}_{2k}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{2k}\mathrm{C}_{2k-1}$의 값 구하기	50%
	$f(n)$을 간단히 나타내기	40%
답 구하기	$f(5)$의 값 구하기	10%

교과서 56 쪽

개념 넓히기

집합의 분할과 자연수의 분할

[1] 일반적으로 $S(n, k)(1\le k\le n)$를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

n개의 원소를 가지고 있는 집합을 k개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 것은 n명을 k개의 모둠으로 나누는 것과 같다.

n명을 1개의 모둠으로 나누는 경우는 한 가지이고, n명을 n개의 모둠으로 나누는 경우도 한 가지이므로

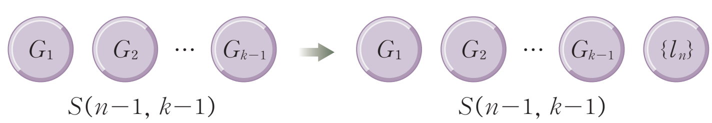
$$S(n, 1)=1,\ S(n, n)=1$$

이다.

$1<k<n$일 때, n명의 사람 $l_1, l_2, \cdots, l_n$을 k개의 모둠으로 나누는 경우는 다음과 같이 l_n이 혼자서 한 개의 모둠을 이루는 경우와 l_n이 다른 사람과 함께 한 개의 모둠을 이루는 경우의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.

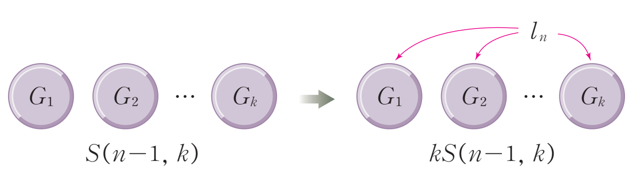
(ⅰ) l_n이 혼자서 한 개의 모둠을 이루는 경우

$l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$을 $(k-1)$개의 모둠 $G_1, G_2, \cdots, G_{k-1}$로 분할함으로써 k개의 모둠 $G_1, G_2, \cdots, G_{k-1}, \{l_n\}$을 얻을 수 있으므로 이 경우 집합의 분할의 수는 $S(n-1, k-1)$이다.



(ⅱ) l_n이 다른 사람과 함께 한 개의 모둠을 이루는 경우

$l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$을 k개의 모둠 $G_1, G_2, \cdots, G_k$로 분할하면 집합의 분할의 수는 $S(n-1, k)$이다. 이제 l_n을 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 중 어느 한 모둠에 포함시킬 수 있으므로 이 경우 집합의 분할의 수는 $kS(n-1, k)$이다.



따라서 (i), (ii)에 의하여

$$S(n, k)=S(n-1, k-1)+kS(n-1, k)(1<k<n)$$

임을 알 수 있다.

[2] 일반적으로 $P(n, k)(1\le k\le n)$를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

자연수 n을 1개의 자연수의 합으로 나타내는 경우는 한 가지이고, 자연수 n을 n개의 자연수의 합으로 나타내는 경우도 한 가지이므로

$$P(n, 1)=1,\ P(n, n)=1$$

이다.

$1<k<n$일 때, 자연수 n을 k개의 자연수의 합으로 나타내는 경우는 다음과 같이 1이 분할 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 중 하나인 경우와 1이 분할 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 중 하나가 아닌 경우의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 1이 분할 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 중 하나인 경우

1을 제외하면 나머지는 $(n-1)$의 $(k-1)$ 분할이 되므로 이 경우 n의 분할의 수는 $P(n-1, k-1)$이다.

(ii) 1이 분할 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 중 하나가 아닌 경우

n의 k 분할 $n_1, n_2, \cdots, n_k$의 그림에서 $n_i\ge 2\ (1\le i\le k)$이므로 첫 번째 열을 제외하면 나머지는 $(n-k)$의 k 분할과 같다. 따라서 이 경우 n의 분할의 수는 $P(n-k, k)$이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$P(n, k)=P(n-1, k-1)+P(n-k, k)(1<k<n)$$

임을 알 수 있다.

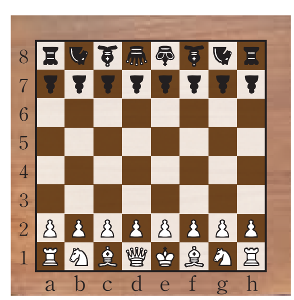
교과서 58 쪽

M+ Real Life

수 학 ✚ 실 생 활

체스

서양 장기인 체스는 7세기 인도의 '차투랑가' 라는 게임에서 유래되었다. 인도의 차투랑가는 처음에 페르시아로 전해졌고, 페르시아로부터 무역 경로를 따라 러시아와 콘스탄티노플로 전해졌다. 또 바이킹이 이것을 스칸디나비아로 가져왔으며, 무어(Moor) 인들이 스페인을 통해 유럽에 전해 주었다. 이렇게 여러 나라를 거치는 동안 이 게임은 나라마다 규칙이 바뀌기도 하고, 피스(piece)라고 불리는 말의 이름과 모양도 다양하게 변했다.

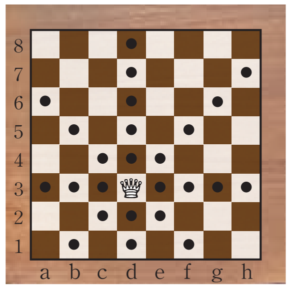


오늘날의 체스 판은 어두운 색 칸과 밝은 색 칸이 엇갈려서 64칸으로 되어 있는데, 파일(file)이라고 하는 8개의 세로줄과 랭크(rank)라고 하는 8개의 가로줄이 있다.

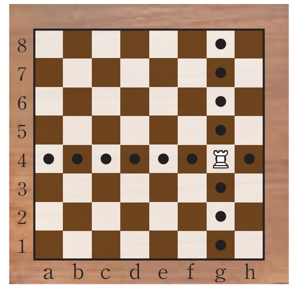
두 경기자는 각각 모두 16개의 말을 가지고 게임을 하는데 백은 밝은 색의 말을, 흑은 어두운 색의 말을 가지게 되며 상대방을 향하여 말을 배치한다. 첫 번째 줄에는 생긴 모양에 따라 5가지로 나뉜 킹(king), 퀸(queen), 룩(rook), 비숍(bishop), 나이트(knight)의 말을 배치하고, 이 5가지 말이 놓인 앞줄인 두 번째 줄에는 폰(pawn)의 말을 배치한다.

각각의 말을 움직이는 방법은 다음과 같다.

킹: 주위 8개의 칸 가운데 어느 곳으로나 1번에 1칸씩만 움직인다.

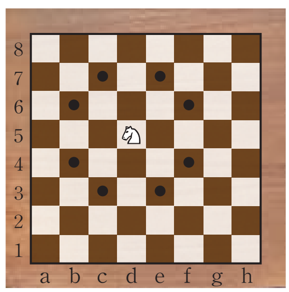


퀸: 룩과 비숍의 힘을 모두 지니고 있어 가로, 세로, 대각선으로 움직인다.

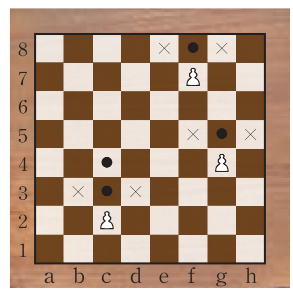


룩: 우리나라 장기에서 차(車)와 같이 움직이는 말로 가로줄과 세로줄을 따라 마음대로 움직인다.

비숍: 대각선으로 마음대로 움직인다.



나이트: L자 모양으로 움직이는데 가로줄(또는 세로줄)로 2칸을 움직이고, 그와 직각을 이루는 세로줄(또는 가로줄)로 1칸 이동한다. 나이트가 움직일 때 그 중간에 어떤 말이 있더라도 이를 뛰어넘을 수 있다.



폰: 원칙적으로 세로줄로 1번에 1칸씩 전진할 수 있지만 처음에는 2칸 이동하는 것도 가능하다. 만일 폰이 체스 판에서 상대방 말이 놓인 처음 칸까지 이동하였다면 퀸, 룩, 나이트, 비숍 중 하나가 될 수 있다.

한편 각 경기자가 각각 단 한 번씩만 말을 움직여도 체스에는 총 400가지의 경우의 수가 생긴다. 이는 두 번의 말 이동이 끝난 뒤에는 19만 7742가지, 세 번씩 움직인 다음에는 1억 2100만 가지 등 게임이 전개되는 경우의 수는 빠른 속도로 늘어난다. 한 연구에 의하면 게임이 전개되는 총 경우의 수는 약 10^{100000}에 이르고, 이중 10^{120}가지가 비교적 일반적으로 전개되는 게임이라고 한다.

10^{120}가지는 얼마나 많은 것일까? 전 세계 인구의 머리카락을 다 모은 개수는 약 10^{15}개이며 전 세계에 있는 모래알의 숫자는 약 10^{23}개라고 한다. 또한 광활한 우주공간 속에 존재하고 있는 원자의 개수도 약 10^{81}개로 추정되고 있다. 이들 3가지를 모두 합쳐도 일반적으로 행해지는 체스 게임의 경우의 수만큼도 되지 않는 것이다. 말판 위에 늘어선 32개의 체스 말이 이토록 천문학적인 경우의 수를 지녔다는 것이 경이롭기까지 하다.

수 학 ✚ 실 생 활

일상생활 속에서 쉽게 볼 수 있는 주사위에는

수많은 확률이 숨어 있다.

Ⅱ 확률

|준|비|학|습|

수학Ⅰ 집합

1 전체집합 $U=\{n \mid n$은 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B가 $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $A \cup B$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ (2) $A \cap B$ $\{2, 4\}$

(3) $A-B$ $\{6, 8\}$ (4) A^C $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

중② 경우의 수

2 회원이 10명인 동아리에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 회장 1명, 부회장 1명을 선출하는 경우의 수 90

(2) 대표 2명을 선출하는 경우의 수 45

단원의 지도 목표

1. 확률의 뜻과 활용

① 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해하게 한다.
② 확률의 기본 성질을 이해하게 한다.
③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있게 한다.

2. 조건부확률

① 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.
② 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
③ 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 이해하게 한다.
② 독립시행의 확률은 통계 영역의 이항분포와 함께 도입하여 다룰 수도 있다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[중1~3학년군] 도수분포와 상대도수 경우의 수와 확률 확률의 성질과 계산 **[수학II]** 집합 **[확률과 통계]** 순열과 조합 분할과 이항정리	**1. 확률의 뜻과 활용** 확률의 뜻 확률의 기본 성질 **2. 조건부확률** 조건부확률 사건의 독립과 종속	**[확률과 통계]** 확률분포 통계적 추정

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~6	60~61	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 확률의 뜻과 활용	**중단원 도입**		62	• 재미있는 일상 속의 확률	
	01 확률의 뜻		63~70	• 시행과 사건 • 수학적 확률 • 통계적 확률	시행 배반사건 여사건 수학적 확률 통계적 확률 $\mathrm{P}(A)$
	02 확률의 기본 성질	7~11	71~76	• 확률의 기본 성질 • 확률의 덧셈정리 • 여사건의 확률	
	수준별 학습	12	77~79	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 조건부확률	**중단원 도입**	13~16	80	• 합리적인 분배	
	01 조건부확률		81~85	• 조건부확률 • 확률의 곱셈정리	조건부확률 $\mathrm{P}(B\|A)$
	02 사건의 독립과 종속	17~19	86~90	• 사건의 독립과 종속 • 독립시행의 확률	독립 종속 독립시행
	수준별 학습	20	91~93	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		21~22	94~99	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 확률의 역사

확률의 역사는 중세 유럽에서 귀족 사회의 놀이였던 주사위, 카드 등의 도박으로부터 유래되었다.

이탈리아의 수학자 파촐리(Pacioli, L. ; 1445~1517)는 그의 저서 "Summa de arithmetica, geometrio, proportionie proportionalita(1494)"에서 소위 'Problem of points'라고 불리는 도박 문제를 처음으로 다루면서 확률의 개념을 제기하였다. Problem of points란 두 사람이 주사위 게임을 하다가 중단한 경우에 판돈을 공평하게 분배하려면 어떻게 해야 하는지에 대한 문제이다.

파스칼

그러나 확률의 본격적인 연구는 17세기 파스칼(Pascal, B. ; 1623~1662)과 페르마(Fermat, P. ; 1601~1665) 사이에 Problem of points와 주사위 문제에 관한 서신 왕래에 의해 본격적으로 고찰되었다. 주사위 문제란 두 개의 주사위를 던져서 두 개 모두 6의 눈이 나오면 이긴다고 할 때 몇 번 던져야 이기는가에 대한 문제이다.

그 후 네덜란드의 하위헌스(Huygens, C. ; 1629~1695)는 파스칼과 페르마가 고찰한 확률 문제를 정리하여 처음으로 확률에 관한 책 "De Rationciniis in Ludo Aleae"를 저술하였고 스위스의 베르누이(Bernoulli, J. ; 1654~1705)와 프랑스의 드무아브르(de Moivre, A. ; 1667~1754)에 의하여 확률 이론은 급속한 발전을 이루었다. 베르누이는 큰 수의 법칙을 발표하여 확률론을 수학의 한 분야로 자리잡게 하였고, 드무아브르는 도박에 관한 수학적인 원리를 체계적으로 밝혔다.

확률론의 체계를 수학적으로 조직화한 사람은 프랑스의 수학자이며 천문학자인 라플라스(Laplace, P. S. ; 1749~1827)이다. 그는 1812년 "확률의 해석적 이론"이라는 저서를 출판하면서 과거 3세기에 걸쳐 산만하게 발달된 확률론을 정리, 체계화하였고, 또 확률을 처음으로 정의하였다.

라플라스

그가 정의한 확률을 고전적 확률 또는 수학적 확률이라고 하는데, 그의 정의는 어떤 시행에서 일어나는 결과의 집합이 유한이고, 각 원소가 같은 정도로 일어날 때만 정의되므로 일반적인 확률의 정의라고 볼 수 없다.

이러한 확률의 정의는 20세기에 들어서면서 힐베르트(Hilbert, D. ; 1862~1943)의 공리적 이론에 영향을 받아 1933년 러시아의 수학자 콜모고로프(Kolmogorov, A. N ; 1903~1987)에 의하여 공리적 확률의 정의가 확립되었다.

콜모고로프

확률이 공리적으로 정의됨으로써 비로소 확률론은 순수 수학의 한 분야로 정착되었고, 오늘날 확률론의 응용 범위는 급속히 확대되기 시작하였다.

2. 수학적 확률의 정의

19세기 초 라플라스가 정의한 수학적 화률의 정의는 다음과 같다.

표본공간이 N개의 원소로 이루어져 있고, 각 원소가 같은 정도로 일어날 것이 기대될 때, 사건 A가 r개의 원소로 이루어져 있으면 A가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{r}{N}$ 이다.

3. 통계적 확률의 정의

수학적 확률은 표본공간의 각 원소가 같은 정도로 일어날 것이 기대된다는 가정 아래에서 정의된 확률이다. 그러나 자연 현상이나 사회 현상 중에는 각 원소가 같은 정도로 일어날 것이라고 기대될 수 없는 경우가 흔히 있다.

이와 같은 경우에는 실제로 시행을 여러 번 반복하여 어떤 사건에 대한 상대도수를 그 사건의 확률로 정의한다. 즉, 같은 시행을 n번 반복할 때, 어떤 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n}=p$이면 p를 사건 A의 통계적 확률 또는 경험적 확률이라고 한다.

통계적 확률에서는 실제로 시행 횟수 n을 무한히 크게 할 수는 없으므로 극한값이 존재하는지를 알 수 없다는 단점을 가지고 있다. 따라서 실제로는 통계적 확률을 구할 때, n이 적당한 크기일 때의 $\frac{r_n}{n}$의 값을 통계적 확률의 근삿값으로 본다.

통계적 확률은 표본공간의 각 근원사건이 같은 정도로 일어날 것이 기대될 때에도 정의된다. 이 경우에는 수학적 확률과 통계적 확률은 같아진다라는 것이 베르누이의 큰 수의 법칙에 의해서 증명된다.

4. 공리적 확률의 정의

전구의 수명, 사람들의 키가 취하는 값은 실수이다. 이때 전구의 수명이 10시간보다 클 확률 또는 키가 179 cm보다 작을 확률은 어떻게 구하는가? 이와 같은 확률은 수학적 확률 또는 통계적 확률로 구할 수 없다. 따라서 이와 같은 경우에도 확률을 정의하기 위해서 콜모고로프는 확률을 어떤 공리를 만족하는 것으로 정의하였다.

공리적 확률의 정의는 다음과 같다.

표본공간 S의 부분집합의 집합족 $\mathcal{F}$에 대하여

(1) $S\in\mathcal{F}$

(2) $A\in\mathcal{F}$이면 $A^C\in\mathcal{F}$

(3) $A_i\in\mathcal{F}\,(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이면

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots\in\mathcal{F}$$

를 만족할 때, 집합족 $\mathcal{F}$를 $\sigma-$algebra라고 한다.

$\sigma-$algebra $\mathcal{F}$ 위에 정의되는 집합 함수 P가

(1) 임의의 $A\in\mathcal{F}$에 대하여 $0\le \mathrm{P}(A)$

(2) $\mathrm{P}(S)=1$

(3) 임의의 $A_i,\ A_j\in\mathcal{F}$에 대하여 $A_i\cap A_j=\varnothing\,(i\neq j)$이고

$$\mathrm{P}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_i)$$

를 만족할 때, P를 확률 또는 확률측도라 하고 $(S,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$를 확률공간이라고 한다.

공리적 확률을 이해하려면 측도론과 적분론을 이해해야 한다. 콜모고로프의 공리적 확률은 전체 공간의 확률이 1인 특정한 르베그 측도(Lebesgue measure)로 정의되며, 이 정의는 수학적 확률 또는 통계적 확률과 같이 구체적인 식으로 확률을 정의하는 것이 아니라 확률이 가지고 있어야 할 수학적 기본 성질을 형식적으로 나타내어 확률을 정의한 것이다.

따라서 공리적 확률로는 확률의 값을 구할 수 없다. 표본공간이 유한이거나 셀 수 있는 경우, 즉 이산인 경우에 각 원소가 같은 정도로 일어날 것이 기대되면 그 경우에는 수학적 확률이 위의 공리를 만족하게 되므로 수학적 확률로 확률을 구하고, 표본공간이 이산이고 각 원소가 같은 정도로 일어날 것이 기대되지 않으면 통계적 확률이 위의 공리를 만족하게 되므로 통계적 확률로 확률을 구하면 된다. 또 표본공간이 연속이면 길이, 넓이, 부피 등의 기하적 측도가 위의 공리를 만족하게 되므로 적분으로 도입하여 확률을 구하면 된다.

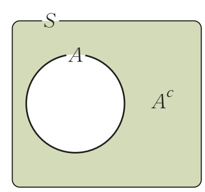
공리적 확률은 르베그 적분으로 정의되기 때문에, 무한의 경우에도 적용할 수 있고 대수의 법칙 또는 그 일반화 법칙 등이 이론적으로 매우 간단하게 증명된다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원		Ⅱ. 확률	쪽수	교과서 60~64쪽
소단원		1. 확률의 뜻과 활용　01 확률의 뜻	차시	1/22
학습 목표		시행과 사건의 의미를 이해한다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◯ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. ◯ 중단원 도입 글을 읽고 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◯ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 시행과 사건의 의미를 이해한다.		모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◯ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ◯ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◯ 학습 내용 설명 **시행** 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰 **표본공간과 사건** 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다. **근원사건** 표본공간의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건 **전사건과 공사건** 어떤 시행에서 반드시 일어나는 사건을 전사건이라 하고, 결코 일어나지 않는 사건을 공사건이라 한다. ◯ 문제 1번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		근원사건이 같은 정도로 일어나는 경우만 다룬다.
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◯ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◯ 다음 차시를 예고한다. • 배반사건의 의미를 알아본다.		

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅱ. 확률	쪽수	교과서 64~65쪽
소단원	1. 확률의 뜻과 활용　01 확률의 뜻	차시	2/22
학습 목표	배반사건의 의미를 이해한다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 학습 목표 제시	◐ 합집합, 교집합, 서로소인 두 집합의 의미를 간단히 확인, 점검한다. ◐ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 배반사건의 의미를 이해한다.	
전개	개념 학습	◐ 학습 내용 설명 **합사건** 표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 A와 B의 합사건이라 하고, 기호로 $A\cup B$와 같이 나타낸다. **곱사건** 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 사건을 A와 B의 곱사건이라 하고, 기호로 $A\cap B$와 같이 나타낸다. **배반사건** 두 사건 A, B에 대하여 A와 B 중에서 어느 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어나지 않을 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$ 일 때, 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이라고 한다.  	두 사건 A, B에서 배반사건을 생각할 때, 두 사건 A, B가 공집합이 아닌 경우만 다룬다.
	문제 해결	◐ 문제 2번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 수학적 확률의 의미를 알아본다.	

1 확률의 뜻과 활용

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 수학적 확률과 통계적 확률의 의미를 이해하게 한다.

② 확률의 기본 성질을 이해하게 한다.

③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 확률의 뜻	시행과 사건
	수학적 확률
	통계적 확률
02 확률의 기본 성질	확률의 기본 성질
	확률의 덧셈정리
	여사건의 확률
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

들어가면서 확률론은 17세기 파스칼과 페르마가 도박에 관한 문제를 해결하는 과정에서 이를 수학적으로 취급한 것이 발단이 되었다. 그 이후 하위헌스, 드무아브르, 베르누이 등에 의해 수학적 이론으로 발달하게 된다. 현재에는 사회과학, 연금, 보험, 기상학, 의학 등 다양한 분야에서 활용되고 있다.

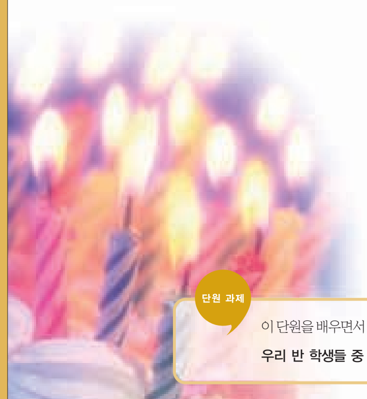
이 단원에서는 시행과 사건의 뜻, 수학적 확률과 통계적 확률의 정의에 대하여 지도하게 된다. 또 확률의 기본 성질과 확률 계산의 기본 법칙인 확률의 덧셈정리를 다룬다.

교과서 62 쪽

1 확률의 뜻과 활용

재미있는 일상 속의 확률

우리 일상생활 속에는 확률로 구할 수 있는 문제가 많이 있는데, 이런 문제 중에는 생일과 관련한 문제도 있다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 76쪽

우리 반 학생들 중 생일이 서로 같은 사람이 있을 확률은 얼마일까?

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다.	상	통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 이해하고 확률의 기본 성질을 설명할 수 있다.
	중	통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 알고, 확률의 기본 성질을 이해한다.
	하	수학적 확률의 의미를 알고 확률의 기본 성질을 말할 수 있다.
2. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	상	확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있다.
	중	두 사건 각각의 확률과 두 사건의 곱사건의 확률이 주어진 상황에서 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있다.
	하	확률의 덧셈정리를 말할 수 있다.
3. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.	상	여사건을 이용하여 확률을 구할 수 있다.
	중	구하고자 하는 확률을 $P(A)$라고 할 때, 여사건 A^C가 일어나는 경우의 수를 쉽게 구할 수 있는 상황에서 여사건을 이용하여 확률을 구할 수 있다.
	하	여사건의 확률의 뜻을 말할 수 있다.

교과서 63 쪽

01 확률의 뜻

● 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.

시행과 사건이란 무엇인가?

생각 열기

주사위

기원전 49년에 카이사르가 "주사위는 던져졌다."라고 선언하고 루비콘 강을 건너 폼페이우스를 격파한 유명한 이야기에서도 등장하는 주사위는 아주 오래전부터 일상 속에서 사용되어 왔다. 기원전 3400년 전 이집트에서는 지금과 똑같은 모양의 주사위를 사용하였고, 통일 신라 시대에는 목제 주령구라고 부르는 14면체의 주사위를 사용하였다. 보통 주사위는 정육면체로 만들어진 것을 말하는데, 최근에는 각 면이 나올 확률이 같은 다면체를 모두 주사위라고 부른다.


목제 주령구

탐구 활동

한 개의 주사위를 던져서 나오는 모든 눈의 수의 집합을 S라고 하자. 집합 S의 부분집합에 대하여 홀수인 눈의 수의 집합을 A, 소수인 눈의 수의 집합을 B라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 집합 S의 원소를 모두 말하여 보자.
2. 홀수이거나 소수인 눈의 수의 집합을 집합 A, B를 이용하여 나타내어 보자.
3. 홀수이면서 소수인 눈의 수의 집합을 집합 A, B를 이용하여 나타내어 보자.
4. 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 반드시 2에서 나타낸 집합에 속한다고 할 수 있는가?

주사위를 던져서 나오는 눈의 수는 우연에 의하여 결정된다. 이처럼 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰을 **시행**이라고 한다.

● 표본공간은 공집합이 아닌 경우만 생각한다. 일반적으로 사건과 그 사건을 나타내는 집합은 구별하지 않고 모두 사건이라고 한다.

❶ 이때 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다. 또 표본공간의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라고 한다.

한편 어떤 시행에서 반드시 일어나는 사건을 전사건이라 하고, 이것은 표본공간과 같다. 또 결코 일어나지 않는 사건을 공사건이라 하고, 이것은 공집합 $\varnothing$로 나타낸다.

새로 나온 용어와 기호

- 시행(試行, trial)
- 배반사건(排反事件, exclusive events)
- 여사건(餘事件, complementary event)
- 수학적 확률(數學的確率, mathematical probability)
- 통계적 확률(統計的確率, statistical probability)
- $\mathrm{P}(A)$

생각 열기 참/고/자/료

주사위가 우리나라에 들어온 시기는 명확하지 않으나 신라 유적지인 경주 안압지에서 1975년에 출토된 '목제 주령구(木製酒令具)'라는 14면체의 주사위가 가장 오래된 것이다. 이것은 6개의 정사각형과 8개의 육각형으로 이루어진 14면체로 각 면에 다양한 벌칙을 뜻하는 사자성어가 적혀 있어 신라인들의 음주 문화와 풍류를 보여주고 있다. 서양은 물론 일본이나 중국에서도 발견되지 않는 독특한 기하학적인 구조를 가진 이 14면체의 주사위는 기하학적인 측면에서 정육면체의 서양의 것보다 더 발전된 것으로 평가되고 있다.

01 확률의 뜻

소단원 지도 목표

① 시행과 사건의 뜻을 알게 한다.
② 배반사건과 여사건의 뜻을 알게 한다.
③ 수학적 확률의 의미를 이해하게 한다.
④ 통계적 확률의 의미를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 시행과 사건의 의미는 구체적인 예를 들어 개념화하도록 지도한다.
2. 표본공간과 사건은 집합과 관련시켜 이해할 수 있도록 지도한다.
3. 배반사건과 여사건을 혼동하지 않도록 지도한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주사위를 던지는 시행을 통해 표본공간과 사건을 집합과 관련시켜 생각해 볼 수 있도록 한다.

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6

2. $A \cup B$

3. $A \cap B$

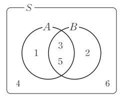
4. $6 \notin A \cup B$이므로 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 반드시 $A \cup B$에 속한다고 할 수 없다.

본문 해설

❶ 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 1의 눈이 나오는 사건은 더 이상 나눌 수 없는 사건이다. 이와 같이 더 이상 나눌 수 없는 사건을 근원사건이라 한다. 표본공간과 사건은 이러한 근원사건들을 원소로 하는 집합이다.

교과서 64 쪽

보기 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 나오는 눈의 수의 표본공간 S는 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고, 이 시행에서 홀수인 눈이 나오는 사건 A는 $A=\{1, 3, 5\}$, 소수인 눈이 나오는 사건 B는 $B=\{2, 3, 5\}$이다.
한편 이 시행의 근원사건은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$이다.



● 모든 근원사건의 개수는 표본공간 S의 원소의 개수 $n(S)$와 같다.

문제 1 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S와 서로 같은 면이 나오는 사건 A를 각각 구하여라. (단, 동전의 앞면은 H, 뒷면은 T로 나타낸다.)

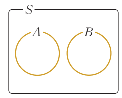
표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 A와 B의 합사건이라 하고, 기호로 $A\cup B$와 같이 나타낸다.

또 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 사건을 A와 B의 곱사건이라 하고, 기호로 $A\cap B$와 같이 나타낸다.

한편 두 사건 A, B에 대하여 A와 B 중에서 어느 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어나지 않을 때, 즉

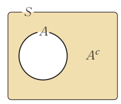
$$A\cap B=\varnothing$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **배반사건**이라고 한다.



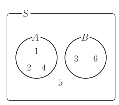
● 배반사건은 서로 동시에 일어나지 않는다.

❶ 그리고 어떤 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 **여사건**이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다. 이때 $A\cap A^C=\varnothing$이므로 A와 A^C은 서로 배반사건이다.



● A^C에서 C는 Complementary event(여사건)의 첫 글자이다.

보기 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{3, 6\}$이고, 이때 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.
한편 $A^C=\{3, 5, 6\}$이고, $B^C=\{1, 2, 4, 5\}$이다.



교과서 65 쪽

문제 2 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼내는 시행에서 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 사건을 A, 9의 약수인 사건을 B라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 사건 A와 B는 서로 배반사건인가?
(2) 사건 A, B의 여사건 A^C, B^C을 각각 구하여라.

수학적 확률이란 무엇인가?

생각 열기 **껌(gum)**

껌은 300년경에 중앙아메리카에 살고 있던 마야 족이 사포딜라라는 나무의 수액으로 만든 고체화된 치클을 씹은 데서 유래하였다. 껌은 오랫동안 치클로 만들어왔지만 경제성과 상품성을 이유로 현대의 많은 껌들은 치클 대신 화학적으로 합성하여 만들어 낸 '초산 비닐 수지'라는 물질로 만들어진다.

탐구 활동 **모양과 크기가 같은 5종류의 껌 a, b, c, d, e가 각각 1개씩 들어 있는 주머니가 있다. 이 껌들 중에서 a와 d만 치클을 사용하여 만들었고, 나머지는 초산 비닐 수지를 사용하여 만들었다고 한다. 주머니에서 한 개의 껌을 꺼낼 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 표본공간 S의 원소의 개수를 구하여 보자.
2. 치클로 만든 껌을 꺼내는 사건을 A라고 할 때, 사건 A의 원소의 개수를 구하여 보자.
3. 사건 A가 일어날 확률을 구하고, 그 이유를 말하여 보자.

탐구 활동에서 주머니 속의 5종류의 껌 중 1개의 껌을 꺼낼 때, 각각의 껌이 나올 가능성은 모두 같은 정도로 기대된다. 즉, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되므로 사건 A가 일어날 확률은

$$\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

로 구할 수 있다.

1

목표| 표본공간과 사건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $S=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})\}$
$A=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})\}$

본문 해설

❶ $A\cap A^C=\varnothing$이므로 사건 A와 A^C은 서로 배반사건이다. 즉, 여사건이면 배반사건이다. 그러나 $A\cap B=\varnothing$이라고 해서 반드시 $A^C=B$가 되지 않으므로 배반사건이라고 하여 여사건이라고 할 수 없다.

2

목표| 배반사건과 여사건의 뜻을 알게 한다.

풀이| (1) $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 3, 9\}$이고 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$는 서로 배반사건이다.
(2) $A^C=\{\mathbf{1, 3, 5, 7, 9}\}$, $B^C=\{\mathbf{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10}\}$

생각 열기 참/고/자/료

씹는 능력은 소화나 영양 섭취는 물론, 신경자극을 통한 장기 활동의 촉진을 돕기도 한다. 이러한 이유로 껌을 이용한 씹기 효과가 새롭게 평가받고 있다. 껌을 씹으면서 얻게 되는 대표적인 효과로는 저작기능 강화, 타액분비 촉진, 소화액분비 촉진, 장폐색증 감소, 이닦기와 프라그 제거 효과, 불안감 해소, 뇌기능 활성, 역류성 식도염 예방, 집중력 향상 등이 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 사건이 일어날 확률을 구하는 과정을 통해 수학적 확률의 의미를 이해하게 하려는 것이다.

1. 5 **2.** 2

3. 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 5이고, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 2이므로 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{2}{5}$라고 할 수 있다.

교과서 66 쪽

이와 같이 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

● $\mathrm{P}(A)$에서 P는 Probability(확률)의 첫 글자이다.

일반적으로 어떤 시행에서 표본공간 S가 m개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{m}$$

와 같이 정의하고, 이것을 사건 A의 **수학적 확률**이라고 한다.

● $n(A)$는 사건 A의 근원사건의 개수이다.

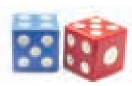
이상을 정리하면 다음과 같다.

수학적 확률

어떤 시행에서 표본공간 S의 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}$$

예제 01 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 8이 될 확률을 구하여라.



	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

풀이 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행에서 표본공간 S는

$$S=\{(1,1),(1,2),\cdots,(6,5),(6,6)\}$$

이므로 $n(S)=36$

또 나오는 눈의 수의 합이 8인 사건을 A라고 하면

$$A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$

이므로 $n(A)=5$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{36}$$

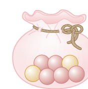
답 $\frac{5}{36}$

교과서 67 쪽

문제 3 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 곱이 4 또는 8이 될 확률을 구하여라.

문제 4 한 개의 동전을 네 번 던질 때, 앞면이 나온 횟수가 뒷면이 나온 횟수보다 많을 확률을 구하여라.

예제 02 노란 구슬 2개와 빨간 구슬 5개가 들어 있는 주머니에서 3개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 노란 구슬 1개와 빨간 구슬 2개가 나올 확률을 구하여라.



풀이 7개의 구슬 중에서 3개를 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_7\mathrm{C}_3=35$$

또 노란 구슬 2개 중에서 1개를 꺼내고, 빨간 구슬 5개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2=2\times10=20$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$$

답 $\frac{4}{7}$

문제 5 10개의 제비 중에서 2개의 당첨 제비가 들어 있는 상자가 있다. 이 중에서 2개의 제비를 동시에 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 당첨 제비가 하나도 없을 확률

(2) 당첨 제비가 1개일 확률

발전

문제 6 남자 3명과 여자 5명이 임의로 원탁에 둘러앉을 때, 남자끼리는 서로 이웃하지 않을 확률을 구하여라.

3

목표| 경우의 수를 구하여 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 일어나는 모든 경우의 수는 36이므로 표본공간 S에 대하여

$n(S)=36$

또 나오는 눈의 수의 곱이 4 또는 8이 되는 사건을 A라고 하면 $A=\{(1,4),(2,2),(2,4),(4,1),(4,2)\}$이므로 $n(A)=5$

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\mathbf{\frac{5}{36}}$

4

목표| 경우의 수를 구하여 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 한 개의 동전을 네 번 던질 때 일어나는 모든 경우의 수는 $2^4=16$이므로 표본공간 S에 대하여

$n(S)=16$

또 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내고 앞면이 나온 횟수가 뒷면이 나온 횟수보다 많은 사건을 A라고 하면

$$A=\{(\mathrm{H},\mathrm{H},\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{H},\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{H},\mathrm{H},\mathrm{T},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T},\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{T},\mathrm{H},\mathrm{H},\mathrm{H})\}$$

이므로 $n(A)=5$

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\mathbf{\frac{5}{16}}$

5

목표| 조합을 이용하여 경우의 수를 구해 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 10개의 제비 중 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$

(1) 당첨 제비가 하나도 없는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2=28$

따라서 구하는 확률은 $\mathbf{\frac{28}{45}}$이다.

(2) 당첨 제비가 1개인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_1=16$

따라서 구하는 확률은 $\mathbf{\frac{16}{45}}$이다.

6

목표| 원순열을 이용하여 경우의 수를 구해 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 남자 3명과 여자 5명이 임의로 원탁에 앉는 경우의 수는 $(8-1)!=7!=5040$
남자끼리는 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 $(5-1)!\times{}_5P_3=1440$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{1440}{5040}=\mathbf{\dfrac{2}{7}}$

창의 UP

출제 의도| 조합을 이용하여 경우의 수를 구해 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 빵 3개를 선택하는 경우의 수는
${}_6C_3=20$
(i) 단팥빵 2개, 크림빵 또는 야채빵을 1개 선택하는 경우의 수: ${}_3C_2\times{}_3C_1=9$
(ii) 크림빵 2개, 단팥빵 또는 야채빵을 1개 선택하는 경우의 수: ${}_2C_2\times{}_4C_1=4$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{9+4}{20}=\mathbf{\dfrac{13}{20}}$

교과서 68 쪽

창의 up

단팥빵, 크림빵, 야채빵이 각각 3개, 2개, 1개가 담겨 있는 접시가 있다. 세 사람이 각각 접시에 담겨 있는 빵을 임의로 1개씩 먹을 때, 두 사람만 같은 종류의 빵을 먹을 확률을 구하는 방법을 설명하여라.

통계적 확률이란 무엇인가?

생각 열기 윷놀이

윷놀이는 삼국 시대 이전부터 전해 오는 우리나라 고유의 민속놀이로 부여(夫餘)에서 돼지, 개, 양, 소, 말을 5개의 부락에 나누어 주고 그 가축들을 경쟁적으로 번식시키려 했던 데에서 비롯된 놀이라고 한다. 그에 연유하여 윷놀이에서 도, 개, 걸, 윷, 모는 각각 돼지, 개, 양, 소, 말을 상징한다.

탐구 활동 다음 표는 한 개의 윷짝을 던지는 시행을 여러 번 반복하였을 때, 윷의 평평한 면이 나온 횟수를 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

시행 횟수(n)	100	300	500	800	1000
평평한 면이 나온 횟수(r_n)	57	183	297	481	598
상대도수$\left(\frac{r_n}{n}\right)$	0.57				

1. 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.
2. 시행 횟수가 커지면 상대도수는 어떻게 될지 추측하여 보자.

수학적 확률은 어떤 시행에서 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대된다는 가정 아래에서 정의하였다. 그러나 자연 현상이나 사회 현상 중에는 어떤 사건의 결과가 같은 정도로 일어날 것이라고 기대하기 어려운 경우가 많이 있다. 예를 들어 비가 올 확률, 야구 선수가 안타를 칠 확률, 공장에서 생산되는 제품이 불량품일 확률 등은 수학적 확률로 정의할 수 없다.

생각 열기 참/고/자/료

윷놀이는 29개의 동그라미를 그린 윷판을 펴 놓고 2명 이상의 인원이 편을 갈라 각자 4개의 윷가락을 던지며 노는 놀이이다. 박달나무 등으로 만든 윷가락을 던져서 도, 개, 걸, 윷, 모를 구하여 한 발부터 다섯 발까지 가서, 말 네 개가 모두 첫밭(입구)인 도에서 출발하여 참먹이(날밭, 출구)를 먼저 빠져 나가는 편이 이기는 놀이로 한국의 수많은 놀이 중 윷놀이는 여럿이 모여 즐길 수 있는 놀이이다. 제야(除夜)와 정월 초하루부터 대보름날까지 노는 것이 일반적이며, 남녀노소 누구나 즐길 수 있으며 오랜 역사와 상징성도 풍부한 놀이로 널리 알려져 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 한 개의 윷짝을 던지는 시행을 여러 번 반복할 때 상대도수가 어떤 값에 가까워지 관찰함으로써 통계적 확률의 의미를 이해하게 하려는 것이다.

1.

시행 횟수(n)	100	300	500	800	1000
평평한 면이 나온 횟수(r_n)	57	183	297	481	598
상대도수$\left(\frac{r_n}{n}\right)$	0.57	**0.61**	**0.594**	**0.60125**	**0.598**

2. 0.6에 가까워질 것이다.

지/도/자/료 기하학적 확률

근원사건이 연속적으로 변하여 경우의 수를 셀 수 없을 때나 각 사건이 일어나는 확률이 어떤 영역의 크기와 관계가 있을 때 다음과 같이 확률을 구할 수 있다.

$$(\text{확률})=\frac{(\text{특정 영역의 넓이})}{(\text{전체 영역의 넓이})}$$

일반적으로 기하학적 확률은 선분의 길이, 영역의 넓이, 입체의 부피와 연속적으로 변화하는 변수가 주어지는 확률의 계산에 사용된다.

교과서 69 쪽

이와 같은 경우는 많은 자료를 수집하여 조사하거나 시행을 여러 번 반복하여 얻은 상대도수를 관찰함으로써 그 사건이 일어나는 전체적인 경향을 알아볼 수 있다.

① 일반적으로 같은 시행을 n번 반복하였을 때 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라고 하자. 이때 n을 한없이 크게 함에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 **통계적 확률**이라고 한다.

그러나 실제로 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 보통 그 사건의 통계적 확률로 본다.

② 한편 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면 사건 A가 일어날 통계적 확률 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다는 것이 알려져 있다.

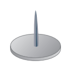
통계적 확률을 경험적 확률이라고도 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

통계적 확률

일정한 조건에서 같은 시행을 n번 반복하였을 때 사건 A가 일어난 횟수 r_n에 대하여 시행 횟수 n이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

보기 누름 못을 1000번 던졌을 때 오른쪽 그림과 같이 침이 위를 향하도록 떨어지는 경우가 438번이었다고 하면, 누름 못의 침이 위를 향하도록 떨어질 통계적 확률은 $\frac{438}{1000}=0.438$이다.



문제 7 2011년 우리나라에서 태어난 신생아는 471265명이었고, 그중 쌍둥이로 태어난 신생아는 13142명이었다. 신생아가 쌍둥이로 태어날 확률을 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

〈출처: 통계청〉

교과서 70 쪽

예제 03 오른쪽 표는 우리나라 국민 7600명을 대상으로 1일 평균 인터넷 이용 시간을 조사하여 나타낸 것이다. 우리나라 국민 중에서 임의로 한 명을 선택하였을 때, 1일 평균 인터넷 이용 시간이 5시간 이상일 확률을 구하여라.

이용 시간(시간)	인원 수(명)
0이상~1미만	342
1 ~2	2166
2 ~3	2972
3 ~4	745
4 ~5	463
5 ~6	562
6 ~	350
합계	7600

〈출처: 통계청, 2010년〉

풀이 조사 대상자 7600명 중에서 인터넷 이용 시간이 5시간 이상인 사람의 수는 $562+350=912$(명)이므로 구하는 확률은

$$\frac{912}{7600}=0.12$$

답 0.12

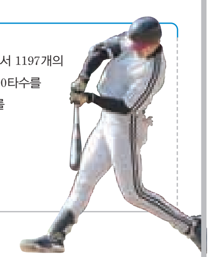
문제 8 오른쪽 표는 어느 시기에 승용차를 구입한 사람 1000명을 대상으로 구입한 승용차의 제조 회사를 조사하여 나타낸 것이다. 이 사람 중에서 임의로 한 명을 선택하였을 때, 구입한 승용차의 제조 회사가 A사일 확률을 구하여라.

제조 회사	인원 수(명)
A사	487
B사	91
C사	64
D사	341
E사	17
합계	1000

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

어느 야구 선수가 지난 시즌까지 통산 3800타수 중에서 1197개의 안타를 기록하였다고 한다. 이 선수가 이번 시즌에 400타수를 기록할 것이라고 예상될 때, 칠 수 있는 안타의 개수를 추측하여 보자.



본문 해설

❶ 통계적 확률에서 실제로는 시행 횟수를 한없이 크게 할 수 없으므로 많은 자료를 수집하여 조사하거나 관찰, 실험을 반복하여 얻어지는 어떤 경향을 통계적 확률로 받아들인다.

❷ 통계적 확률에서 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 $n \to \infty$일 때, 일정한 값 p에 수렴한다는 것은 큰 수의 법칙에 의하여 증명할 수 있지만 여기서는 직관적으로 다룬다.

7

목표| 통계적 확률의 뜻을 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 신생아 471265명 중 쌍둥이로 태어난 신생아가 13142명이므로 구하는 확률은 $\frac{13142}{471265}=0.02788\cdots$이므로 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하면 **0.03**이다.

8

목표| 통계적 확률의 뜻을 이해하고, 이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 승용차를 구입한 사람이 1000명이고, 이 사람 중에서 A사가 제조한 승용차를 구입한 사람이 487명이므로 구하는 확률은 $\frac{487}{1000}=\mathbf{0.487}$

사고력 기르기 추론

출제 의도| 통계적 확률의 뜻을 이해하고, 이를 활용하여 이번 시즌에 칠 수 있는 안타의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 매 타수마다 안타를 칠 확률은

$\frac{1197}{3800}=0.315$

이번 시즌에 칠 수 있는 안타의 개수를 r라고 하면

$\frac{r}{400}=0.315$이므로 $r=400\times0.315=\mathbf{126}$

02 확률의 기본 성질

소단원 지도 목표

① 확률의 기본 성질을 이해하게 한다.
② 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
③ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있게 한다.

교과서 71 쪽

02 확률의 기본 성질

- 확률의 기본 성질을 이해한다.
- 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

확률의 기본 성질에는 어떤 것이 있는가?

생각 열기

월드컵 축구 대회와 상금

월드컵 축구 대회는 국제 축구 연맹(FIFA)이 올림픽 중간 연도를 택해 4년마다 한 번씩 개최하는 세계 선수권 대회이다. 세계 최대의 이벤트라고 할 수 있는 월드컵은 상금이 어마어마하다. 2010년 남아공 월드컵의 총 상금은 3억 9800만 달러(약 4967억 원)로 2006년 독일 월드컵의 총 상금 3억 3200만 스위스 프랑(약 2660억 원)보다 80 % 이상 증가하였다.

탐구 활동

2010년 남아공 월드컵 본선에 진출한 32개국은 최종 성적에 따라 다음과 같이 상금을 차등 지급 받았다고 한다. 남아공 월드컵 본선에 진출한 32개국 중에서 임의로 한 나라를 선택하였을 때, 물음에 답하여 보자.

성적	우승	준우승	4강	8강	16강	조별 리그 탈락
상금(만 달러)	3100	2500	2100	1900	1000	900
팀 수	1	1	2	4	8	16

1. 선택한 나라가 받은 상금이 900만 달러 이상일 확률을 구하여 보자.
2. 선택한 나라가 받은 상금이 3500만 달러 이상일 확률을 구하여 보자.
3. 선택한 나라가 받은 상금이 1500만 달러 이상 3000만 달러 미만일 확률을 구하여 보자.

교수 · 학습상의 유의점

1. 확률은 항상 0에서 1까지의 값을 가지며, 확률이 음수이거나 1보다 큰 수일 수 없음을 이해하도록 지도한다.
2. 확률의 덧셈정리는 집합에서 합집합의 원소의 개수를 구하는 과정과 같음을 이해하게 한다.
3. 확률의 덧셈정리를 활용할 때에는 먼저 두 사건이 서로 배반사건인지 아닌지를 확인한 후 구할 수 있게 한다.
4. 사건의 확률을 직접 구하는 것보다 여사건의 확률을 이용하여 구하는 것이 효율적인 경우를 예를 들어 비교해 봄으로써, 이 두 가지를 문제 상황에 따라 적절하게 이용할 수 있게 지도한다.

생각 열기 참/고/자/료

4년마다 열리는 월드컵은 1930년에 첫 대회가 열렸다. 1942년과 1946년 대회는 제2차 세계 대전 때문에 열리지 못했다. 대회는 예선 무대와 본선 무대 등 두 부분으로 나뉘는데 예선 무대는 본선에 진출할 32팀을 가려내기 위해 본선보다 3년 일찍 시작한다. 현재 본선은 개최국 경기장에서 한 달 남짓 32개 팀이 우승을 놓고 경쟁하는 방식으로 진행된다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 실생활에서 반드시 일어나는 사건과 절대로 일어나지 않는 사건에 대한 확률을 어떻게 나타내는지 알아보고 다양한 확률을 구하는 활동을 통해 확률의 기본 성질을 이해하도록 한다.

1. 월드컵 본선에 진출한 32개국은 모든 나라가 900만 달러 이상의 상금을 받으므로 구하는 확률은 **1**이다.
2. 월드컵 본선에 진출한 32개국 중 상금을 가장 많이 받는 나라는 월드컵 우승국으로 3100만 달러의 상금을 받으므로 구하는 확률은 **0**이다.
3. 월드컵 본선에 진출한 32개국 중 상금이 1500만 달러 이상 3000만 달러 미만인 경우는 최종 성적이 준우승, 4강, 8강에 속하는 7개국이다.
   따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{32}$이다.

교과서 72 쪽

표본공간의 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S에서 성립하는 확률의 기본적인 성질에 대하여 알아보자.

어떤 시행에서 표본공간 S의 임의의 사건 A는 S의 부분집합이므로

$$0 \le n(A) \le n(S)$$

이다. 이때 위의 부등식의 양변을 $n(S)$로 나누면

$$0 \le \frac{n(A)}{n(S)} \le 1$$

이므로 수학적 확률의 정의에 의하여

$$0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$$

이다. 특히 반드시 일어나는 사건 S와 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여

$$\mathrm{P}(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

$$\mathrm{P}(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = 0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 기본 성질

표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여

(1) $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

(2) $A=S$이면 $\mathrm{P}(A)=1$

(3) $A=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A)=0$

보기 빨간 공 2개, 파란 공 3개가 들어 있는 주머니에서 동시에 3개의 공을 꺼낼 때,

(1) 파란 공이 1개 이상 나오는 경우는 반드시 일어나는 사건이므로 파란 공이 1개 이상 나올 확률은 1이다.

(2) 빨간 공만 3개 나오는 경우는 절대로 일어나지 않는 사건이므로 빨간 공이 3개 나올 확률은 0이다.

문제 1 네 개의 숫자 1, 3, 5, 7 중에서 서로 다른 세 개의 숫자를 일렬로 나열하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

(1) 이 수가 홀수일 확률 (2) 이 수가 135보다 작을 확률

교과서 73 쪽

확률의 덧셈정리란 무엇인가?

탐구 활동

상준이는 쿠키 5개와 도넛 3개가 들어 있는 상자에서 임의로 3개를 꺼내 먹으려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 3개가 모두 같은 종류일 확률을 구하여 보자.
2. 3개가 모두 쿠키인 사건을 A, 모두 도넛인 사건을 B라고 할 때, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$를 각각 구하여 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$를 구하여 보자.
3. 1, 2의 결과를 비교하여 보자.

표본공간의 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률을 구하여 보자.

표본공간 S의 임의의 두 사건 A, B에 대하여

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

이므로 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\end{aligned}$$

이다. 특히 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A \cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

이다.

두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \varnothing$이므로 $n(A \cap B)=0$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **확률의 덧셈정리**

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

❷ 세 사건 A, B, C가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $C \cap A = \varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C)$

문제 2 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A) = \frac{5}{12}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$를 구하여라.

1

목표| 확률의 기본 성질을 이해하게 한다.

풀이| (1) 어떠한 경우에도 홀수이므로 구하는 확률은 **1**이다.

(2) 135보다 작은 수는 나올 수 없으므로 구하는 확률은 **0**이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 실생활 문제를 통해 확률의 덧셈정리를 자연스럽게 이해하도록 한다.

쿠키 5개와 도넛 3개 중 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_3 = 56$

1. 3개 모두 같은 종류를 꺼내는 경우는

${}_5\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_3 = 11$

이므로 구하는 확률은 $\mathbf{\frac{11}{56}}$이다.

2. $\mathrm{P}(A) = \frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3} = \frac{10}{56}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3} = \frac{1}{56}$이므로

$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{10}{56} + \frac{1}{56} = \mathbf{\frac{11}{56}}$

3. **1**, **2**에서 구한 결과는 같다.

본문 해설

❶ 확률의 덧셈정리는 그 사건들이 서로 배반인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각한다.

❷ 세 사건 A, B, C에 대하여

$\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$

$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(B \cap C)$

$\quad - \mathrm{P}(C \cap A) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$

이다. 여기서 세 사건 A, B, C 중 임의의 두 사건이 서로 배반사건이면 $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $C \cap A = \varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C)$

2

목표| 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{5}{12}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{5}{6}}$$

3

목표| 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 20장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 선택할 때, 카드에 적힌 수가 2의 배수가 나오는 사건을 A, 3의 배수가 나오는 사건을 B, 4의 배수가 나오는 사건을 C, 소수가 나오는 사건을 D라고 하면

(1) $n(A)=10,\ n(B)=6,\ n(A\cap B)=3$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{10}{20},\ \mathrm{P}(B)=\frac{6}{20},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{10}{20}+\frac{6}{20}-\frac{3}{20}=\mathbf{\frac{13}{20}}$$

(2) $n(C)=5,\ n(D)=8,\ n(C\cap D)=0$이므로

$\mathrm{P}(C)=\frac{5}{20},\ \mathrm{P}(D)=\frac{8}{20}$이고

두 사건 C, D는 배반사건이다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(C\cup D)=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\mathbf{\frac{13}{20}}$$

4

목표| 두 사건이 서로 배반사건임을 확인하고, 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 남녀 8명 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2$이므로 전체 경우의 수는 28이고 뽑은 2명이 모두 남자인 사건을 A, 모두 여자인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{28}=\frac{3}{28}$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{28}=\frac{5}{14}$$

두 사건 A, B는 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{28}+\frac{5}{14}=\mathbf{\frac{13}{28}}$$

교과서 74 쪽

예제 01 어느 반 학생 36명의 통학 수단을 조사하였더니 버스를 이용하는 학생은 18명, 지하철을 이용하는 학생은 15명, 버스와 지하철을 모두 이용하는 학생은 6명이었다. 이 반 학생 36명 중에서 임의로 한 명을 선택하였을 때, 그 학생이 버스 또는 지하철을 타고 통학할 확률을 구하여라.

풀이 36명의 학생 중에서 임의로 한 학생을 선택하였을 때, 선택된 학생이 버스를 이용하는 사건을 A, 지하철을 이용하는 사건을 B라고 하면

$$n(A)=18,\ n(B)=15,\ n(A\cap B)=6$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{18}{36},\ \mathrm{P}(B)=\frac{15}{36},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{18}{36}+\frac{15}{36}-\frac{6}{36}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

문제 3 1부터 20까지의 자연수가 각각 적힌 20장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 선택할 때, 다음을 구하여라.

(1) 카드에 적힌 수가 2의 배수이거나 3의 배수일 확률

(2) 카드에 적힌 수가 4의 배수이거나 소수일 확률

문제 4 남자 3명, 여자 5명 중에서 2명을 뽑을 때, 모두 남자이거나 모두 여자일 확률을 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

4명의 학생 천호, 현우, 준수, 민호가 체육 대회에서 400 m 이어달리기 경기의 반 대표로 출전하였다. 제비뽑기로 순서를 정할 때, 천호가 가장 먼저 달리거나 민호보다 나중에 달리게 될 확률을 구하여 보자.

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 실생활에서 서로 배반인 두 사건의 합사건이 일어날 확률을 확률의 덧셈정리를 이용하여 구할 수 있게 한다.

풀이| 천호가 가장 먼저 달리는 사건을 A, 민호보다 나중에 달리는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

교과서 75 쪽

여사건의 확률이란 무엇인가?

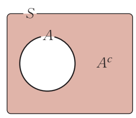
탐구 활동

상자 안의 인형 10개 중 2개가 불량품이라고 한다. 이 상자 안에서 2개의 인형을 동시에 꺼낼 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 불량품이 하나도 뽑히지 않을 확률을 구하여 보자.
2. 불량품이 적어도 하나 뽑힐 확률을 구하여 보자.
3. **1**, **2**에서 구한 확률을 더하여 보자.

표본공간 S에 대하여 사건 A의 여사건 A^C의 확률을 구하여 보자.

$A\cap A^C=\varnothing$이므로 두 사건 A와 A^C은 서로 배반사건이고, $A\cup A^C=S$이므로 다음이 성립한다.



$$\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$$

따라서

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **여사건의 확률**

임의의 사건 A의 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

‘적어도 ~인 사건’, ‘~ 이상인 사건’, ‘~ 이하인 사건’ 등은 여사건을 이용할 수 있다.

보기 서로 다른 3개의 동전을 동시에 던질 때, 3개의 동전 모두 뒷면이 나오는 사건을 A라고 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}$이므로 앞면이 1개 이상 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

문제 5 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수가 서로 다를 확률을 구하여라.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 불량품이 하나도 뽑히지 않는 사건과 불량품이 적어도 하나 뽑히는 사건은 서로 여사건의 관계에 있음을 확인하고, 두 사건이 일어날 확률 사이의 관계를 이용하여 여사건의 확률을 이해하게 하려는 것이다.

1. 불량품이 하나도 뽑히지 않는 사건은 불량품이 아닌 인형 8개 중 2개가 뽑히는 사건과 같으므로

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\mathbf{\frac{28}{45}}$$

2. 불량품이 적어도 하나 뽑히는 사건은 불량품이 2개 뽑히거나 불량품 1개와 정상품 1개가 뽑히는 사건의 합사건이므로

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\mathbf{\frac{17}{45}}$$

3. $\frac{28}{45}+\frac{17}{45}=\mathbf{1}$

본문 해설

❶ 여사건의 확률은 구하고자 하는 사건이 여러 가지 경우로 이루어져 다루기가 불편할 때 사용하면 편리하다. 특히 ‘적어도 ~인 사건’, ‘~ 이상인 사건’, ‘~ 이하인 사건’ 등에 대한 확률 계산에 적용한다.

5

목표 | 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 서로 같은 눈의 수가 나오는 사건을 A라고 하면 서로 다른 눈의 수가 나오는 사건은 A^C이다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{5}{6}}$

지/도/자/료

표본공간, 사건 등을 집합과 연결지어 생각하면 확률을 계산하는 데 편리하다.

표본공간 또는 전체 사건	⟷	전체집합
사건	⟷	부분집합
합사건	⟷	합집합
공사건	⟷	공집합
여사건	⟷	여집합

교과서 76 쪽

예제 02 유통 기한이 5일 남은 우유가 10개, 2일 남은 우유가 4개 있는 진열대에서 임의로 3개의 우유를 선택할 때, 유통 기한이 2일 남은 우유가 1개 이상 포함될 확률을 구하여라.

풀이 유통 기한이 5일 남은 우유만 3개 선택하는 사건을 A라고 하면, 유통 기한이 2일 남은 우유가 1개 이상 포함되는 사건은 사건 A의 여사건 A^C이다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{30}{91}$$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{30}{91}=\frac{61}{91}$$

답 $\frac{61}{91}$

문제 6 10원, 50원, 100원, 500원짜리 동전이 각각 1개씩 있다. 이 4개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 나온 동전의 금액의 합이 50원 이상일 확률을 구하여라.

발전

문제 7 전체 직원이 30명인 어느 회사에서는 직원들을 A, B, C 세 등급으로 나누어 성과급을 차등 지급하고 있고, 각 등급에 속하는 인원 수의 비율은 3 : 4 : 3이라고 한다. 이 회사 직원 중에서 임의로 4명을 선택하였을 때, A 등급을 받은 직원이 적어도 1명 포함되어 있을 확률을 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

우리 반에 생일이 서로 같은 학생이 있을 확률이 매우 작을 것처럼 보이지만 직접 계산하여 보면 그 확률이 크다는 것을 알 수 있다.
1년이 365일이라고 할 때, 우리 반 학생 35명 중에서 생일이 서로 같은 두 사람이 있을 확률을 공학용 계산기를 이용하여 소수 셋째 자리까지 구하여 보자.

6

목표| 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 4개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 나온 동전의 금액의 합이 50원 미만인 사건을 A라고 하면 50원 이상인 사건은 A^C이다.
사건 A가 일어나는 경우는 다음 두 가지 경우가 있다.

(i) 4개의 동전 모두 뒷면이 나오는 경우:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

(ii) 10원짜리 동전만 앞면이 나오고 나머지 3개의 동전은 뒷면이 나오는 경우:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

7

목표| 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| A, B, C 등급을 받은 사람은 각각 9명, 12명, 9명이다.
전체 직원 30명 중 4명을 임의로 선택했을 때, 4명 모두 B 또는 C 등급을 받은 사람이 선택되는 사건을 E라고 하면, A 등급을 받은 사람이 적어도 1명 포함되는 사건은 E^C이다.

$$\mathrm{P}(E)=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_4+{}_9\mathrm{C}_4+{}_{12}\mathrm{C}_1\times{}_9\mathrm{C}_3+{}_{12}\mathrm{C}_2\times{}_9\mathrm{C}_2+{}_{12}\mathrm{C}_3\times{}_9\mathrm{C}_1}{{}_{30}\mathrm{C}_4}$$

$$=\frac{5985}{27405}=\frac{19}{87}$$

이므로

$$\mathrm{P}(E^C)=1-\mathrm{P}(E)=1-\frac{19}{87}=\boldsymbol{\frac{68}{87}}$$

단원 과제

목표| 여사건의 확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 35명의 생일이 모두 다른 사건을 A라고 하면 35명 중에서 생일이 같은 두 학생이 있게 되는 사건은 A^C이다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{365}\mathrm{P}_{35}}{{}_{365}\Pi_{35}}=0.1856\cdots$$

이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-0.1856\cdots=$약 **0.814**

교과서 77 쪽

중단원 기초

[해답 p.168]

수준별 학습

1 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10장의 카드에서 임의로 한 장을 뽑을 때, 다음 세 사건 A, B, C 중에서 서로 배반사건인 것을 모두 찾아라.

01 확률의 뜻 시행과 사건

> A: 소수가 적힌 카드가 나오는 사건
> B: 4의 약수가 적힌 카드가 나오는 사건
> C: 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건

2 5명의 회원 A, B, C, D, E로 구성된 모임에서 여행을 가려고 한다. 제비뽑기로 운전할 사람 2명을 미리 정하려고 할 때, A가 포함될 확률을 구하여라.

01 확률의 뜻 수학적 확률

3 흰 바둑돌 2개와 검은 바둑돌 4개가 들어 있는 주머니에서 3개의 바둑돌을 동시에 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 흰 바둑돌이 3개 나올 확률
(2) 검은 바둑돌이 1개 이상 나올 확률
(3) 흰 바둑돌 1개, 검은 바둑돌 2개가 나올 확률

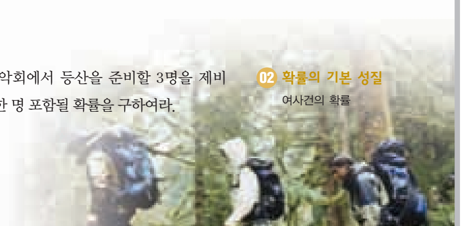
02 확률의 기본 성질

4 주사위 한 개를 던져 나온 눈의 수가 2의 배수 또는 4의 약수일 확률을 구하여라.

02 확률의 기본 성질 확률의 덧셈정리

5 남자 4명과 여자 6명으로 이루어진 산악회에서 등산을 준비할 3명을 제비뽑기로 정하려고 할 때, 남자가 적어도 한 명 포함될 확률을 구하여라.

02 확률의 기본 성질 여사건의 확률



중/단/원 기초

1

목표| 배반사건의 뜻을 알게 한다.

풀이| $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$, $C=\{3,\ 6,\ 9\}$이므로 두 사건 B와 C에 대해서만 $B\cap C=\varnothing$이다.
따라서 서로 배반사건인 것은 **사건 B와 C**이다.

2

목표| 조합을 이용하여 경우의 수를 구해 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 5명의 회원 중에서 운전할 사람 2명을 선택하는 경우의 수는
${}_5C_2=10$
A가 포함되는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{2}{5}}$

3

목표| 확률의 기본 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 어떤 경우에도 흰 바둑돌이 3개가 나올 수 없으므로 구하는 확률은 **0**이다.
(2) 모든 경우에서 검은 바둑돌은 1개 이상 나오므로 구하는 확률은 **1**이다.
(3) 주머니에서 3개의 바둑돌을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
흰 바둑돌 1개, 검은 바둑돌 2개가 나오는 경우의 수는 ${}_2C_1\times{}_4C_2=12$
따라서 구하는 확률은
$\frac{12}{20}=\mathbf{\frac{3}{5}}$

4

목표| 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주사위 한 개를 던져 나온 눈의 수가 2의 배수인 사건을 A, 4의 약수인 사건을 B라고 하면
$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$, $A\cap B=\{2,\ 4\}$
이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

5

목표| 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 등산을 준비할 3명 중 남자가 한 명도 포함되지 않는 사건을 A라고 하면 남자가 적어도 한 명 포함되는 사건은 A^C이다.
$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{5}{6}}$

중/단/원 기본

1

목표| 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구해 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 모든 경우의 수는 $\dfrac{9!}{5!4!}=126$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!2!}\times\dfrac{4!}{2!2!}=60$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{60}{126}=\mathbf{\dfrac{10}{21}}$

2

목표| 순열을 이용하여 경우의 수를 구해 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 6명이 좌석에 앉는 경우의 수는 $6!$이고 주영이와 종수가 이웃해서 앉게 되는 경우의 수 $4\times4!\times2$이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4\times4!\times2}{6!}=\mathbf{\dfrac{4}{15}}$

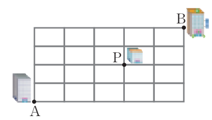
교과서 78 쪽

중단원 **기본**

[해답 p.168]

수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같은 도로가 있다. A 지점에서 B 지점으로 최단 거리로 가려고 할 때, P 지점을 거쳐서 가는 확률을 구하여라.



01 확률의 뜻
수학적 확률

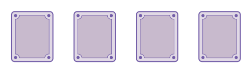
2 주영이와 종수를 포함한 영화 감상 동아리 회원 6명이 영화를 보기 위하여 예매한 표의 좌석 배치도는 다음 그림과 같다. 6명의 회원이 임의로 표를 받아 해당하는 좌석에 앉을 때, 주영이와 종수가 이웃하여 앉게 될 확률을 구하여라. (단, 통로에 의해 인접하는 경우는 이웃하지 않은 것으로 본다.)

01 확률의 뜻
수학적 확률

3 빨간 구슬과 파란 구슬이 모두 7개 들어 있는 주머니에서 2개의 구슬을 꺼내 색을 확인하고 다시 넣는 시행을 여러 번 반복하였더니 7번에 한 번 꼴로 2개가 모두 빨간 구슬이었다. 이때 주머니 속에는 몇 개의 빨간 구슬이 들어 있다고 볼 수 있는지 구하여라.

01 확률의 뜻
통계적 확률

4 1부터 9까지의 자연수가 각각 적힌 9장의 카드가 들어 있는 상자에서 임의로 4장의 카드를 꺼내 순서대로 나열하여 네 자리 수를 만들었다. 이때 이 수가 2의 배수이거나 5의 배수일 확률을 구하여라. (단, 꺼낸 카드는 다시 넣지 않는다.)



02 확률의 기본 성질
확률의 덧셈정리

5 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 x, y, z라고 할 때, $(x-y)(y-z)(z-x)=0$일 확률을 구하여라.

02 확률의 기본 성질
여사건의 확률

3

목표| 통계적 확률을 이용하여 주머니 속에 들어 있는 빨간 구슬의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주머니 속에 빨간 구슬이 n개 들어 있다고 하면

$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{7}$

$n(n-1)=6$에서 $n^2-n-6=0$

$n>0$이므로 $n=3$

따라서 주머니 속에 빨간 구슬이 **3개** 들어 있다고 볼 수 있다.

4

목표| 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 2의 배수가 되려면 일의 자리 숫자가 2, 4, 6, 8이 되어야 하고, 5의 배수가 되려면 일의 자리 숫자가 5가 되어야 한다.

네 자리의 자연수가 2의 배수가 되는 사건을 A, 5의 배수가 되는 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_8\mathrm{P}_3\times4}{{}_9\mathrm{P}_4}=\dfrac{4}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_8\mathrm{P}_3\times1}{{}_9\mathrm{P}_4}=\dfrac{1}{9}$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\mathbf{\frac{5}{9}}$$

5

목표| 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 ${}_6\Pi_3=6\times6\times6=216$

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$인 사건의 여사건은

$x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$

즉, 주사위의 눈의 수가 각각 다른 사건이므로 그 경우의 수는 ${}_6\mathrm{P}_3=6\times5\times4=120$

따라서 구하는 확률은 $1-\dfrac{120}{216}=\mathbf{\dfrac{4}{9}}$

교과서 79 쪽

중단원 실력

[해답 p.169]

수준별 학습

1 1부터 9까지의 자연수가 각각 적힌 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내려고 한다. 소수가 적힌 공이 나오는 사건을 A, 짝수가 적힌 공이 나오는 사건을 B라고 할 때, A^C과 C는 서로 배반사건이 되고, B와 C도 서로 배반사건이 되도록 하는 사건 C의 개수를 구하여라. (단, $C \neq \varnothing$)

01 확률의 뜻
시행과 사건

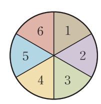
2 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 하자. 두 함수 f, g가 $f(x)=x^2+2ax+b$, $g(x)=2x-1$일 때, 모든 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립할 확률을 구하여라.

01 확률의 뜻
수학적 확률

3 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 중 임의로 한 개를 택할 때, 그 함수의 공역과 치역이 같을 확률을 구하여라.

01 확률의 뜻
수학적 확률

4 오른쪽 그림과 같이 1부터 6까지의 자연수가 적힌 원반 모양의 과녁에 화살을 4번 던져서 맞힌 수를 차례로 a, b, c, d라고 할 때, $a \leq b < c \leq d$가 성립할 확률을 구하여라.



02 확률의 기본 성질
확률의 덧셈정리

5 20개의 제비 중 r개의 당첨 제비가 들어 있는 상자에서 3개의 제비를 동시에 꺼낼 때, 그중에서 적어도 한 개가 당첨 제비일 확률이 $\frac{29}{57}$라고 한다. 이때 r의 값을 구하여라.

02 확률의 기본 성질
여사건의 확률

중/단/원 실력

1

목표| 배반사건의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있게 한다.

풀이| 표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여
$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$
A^C와 C는 서로 배반사건이므로 $C \subset A=\{2, 3, 5, 7\}$
또 B와 C도 서로 배반사건이므로
$C \subset B^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
따라서 $C \subset \{3, 5, 7\}$이고 $C \neq \varnothing$이므로 사건 C의 개수는
$2^3-1=\mathbf{7}$

2

목표| 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+2ax+b \geq 2x-1$에서 $x^2+2(a-1)x+b+1 \geq 0$
이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(b+1) \leq 0$
따라서 $(a-1)^2 \leq b+1$ ⋯⋯ ①
서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, 순서쌍 (a, b)가 ①을 만족시키는 사건을 A라고 하면
A
$=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$
따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{36}=\mathbf{\frac{4}{9}}$

3

목표| 집합의 분할을 이용하여 경우의 수를 구해 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| A에서 B로의 함수의 개수는
${}_3\Pi_5=243$
A에서 B로의 함수 중에서 공역과 치역이 같은 함수의 개수는 집합 A를 3개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 분할하여 각 부분집합의 원소를 집합 B의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 모든 경우의 수와 같으므로
$S(5, 3) \times 3!=25 \times 3!=150$
따라서 구하는 확률은 $\frac{150}{243}=\mathbf{\frac{50}{81}}$

4

목표| 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 원반 모양의 과녁에 화살을 4번 던져서 맞힌 수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 모든 개수는 ${}_6\Pi_4=6^4$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(a<b<c<d)+\mathrm{P}(a=b<c<d)$
$+\mathrm{P}(a<b<c=d)+\mathrm{P}(a=b<c=d)$
$=\frac{{}_6C_4}{6^4}+\frac{{}_6C_3}{6^4}+\frac{{}_6C_3}{6^4}+\frac{{}_6C_2}{6^4}=\mathbf{\frac{35}{648}}$

5

목표| 여사건의 확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 모두 당첨 제비가 아닐 확률은 $1-\frac{29}{57}=\frac{28}{57}$
즉, $\frac{{}_{20-r}C_3}{{}_{20}C_3}=\frac{28}{57}$이므로 $\frac{(20-r)(19-r)(18-r)}{20 \times 19 \times 18}=\frac{28}{57}$
$(20-r)(19-r)(18-r)=16 \times 15 \times 14$
따라서 $r=\mathbf{4}$

2 조건부확률

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.

② 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

③ 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 조건부확률	조건부확률
	확률의 곱셈정리
02 사건의 독립과 종속	사건의 독립과 종속
	독립시행의 확률
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 80 쪽

2 조건부확률

합리적인 분배

프랑스의 수학자인 파스칼(Pascal, B. ; 1623~1662)은 친구인 도박사 드 메레(de Méré, C. ; 1607~1684)에게서 다음과 같은 편지를 받았다.

> 실력이 서로 비슷한 A, B 두 사람이 32피스톨씩 걸고 내기를 하고 있었네. 승부에서 1번 이기면 1점을 얻고, 먼저 3점을 얻은 사람이 64피스톨을 몽땅 가지기로 했네. 그런데 A가 2점, B가 1점을 얻은 시점에서 사정이 생겨 부득이하게 시합을 중지하게 되었는데, 64피스톨을 어떻게 분배하는 것이 가장 합리적이라고 보는가?

*피스톨: 옛날의 스페인 금화

파스칼은 생각 끝에 드 메레에게 해결 방법을 써서 편지를 보냈다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 90 쪽

파스칼이 드 메레에게 보낸 편지에는 어떤 해결 방법이 쓰여 있을까?

들어가면서 일상생활에서 일어나는 사건들은 서로 영향을 주는 경우가 많다. 한 사건이 일어났을 때 다른 사건이 일어날 조건부확률은 18세기 베이즈(Bayes, T. ; 1702~1761) 등에 의하여 연구되었다. 베이즈 정리는 조건부확률을 이용하여 사전적 확률로부터 사후적 확률을 계산할 수 있도록 해 준다.

이 단원에서는 조건부확률을 정의하고 이를 이용하여 확률의 곱셈정리를 유도한다. 또 두 사건의 독립과 종속, 독립시행의 확률을 학습하게 된다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	상	조건부확률을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	조건부확률을 기호로 표현할 수 있고, 간단한 상황에서 조건부확률을 구할 수 있다.
	하	조건부확률의 뜻을 말할 수 있다.
2. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	상	조건부확률로부터 확률의 곱셈정리를 이끌어내고 확률의 곱셈정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	간단한 상황에서 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있다.
	하	확률의 곱셈정리를 말할 수 있다.
3. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 구별할 수 있다.	상	사건의 독립과 종속을 구별하고, 그 이유를 설명할 수 있다.
	중	사건의 독립과 종속의 의미를 이해하여 간단한 상황에서 독립과 종속을 구별할 수 있다.
	하	사건의 독립과 종속의 의미를 말할 수 있다.
4. 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	상	독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	중	간단한 독립시행의 확률을 구할 수 있다.
	하	독립시행의 뜻을 말할 수 있다.

교과서 81 쪽

01 조건부확률

● 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
● 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

조건부확률이란 무엇인가?

생각 열기

흡연과 폐암

폐암의 원인 중 약 85 %는 흡연에 의한 것으로, 흡연은 폐암의 발생 위험을 13배 증가시킨다고 알려져 있다. 흡연의 양과 기간도 폐암에 걸릴 확률과 관련이 있다. 매일 한 갑의 담배를 40년간 피운 사람은 담배를 전혀 피우지 않은 사람에 비하여 폐암에 걸릴 확률이 20배나 높다는 연구가 있다. 또한 20년간 매일 두 갑의 담배를 피워 온 남자라면 폐암으로 사망할 확률이 60~70배 증가한다고 한다.
이러한 담배의 해악은 여성에게 더욱 두드러지게 나타나는데, 남자와 같은 정도로 흡연에 노출되었다면 남자보다 여자가 폐암에 걸릴 확률이 1.5배 높다고 한다.

탐구 활동

다음 표는 어느 병원에서 폐암 진단을 받은 환자 100명을 대상으로 성별에 따른 과거 흡연 여부를 조사하여 나타낸 것이다. 이 100명의 환자 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 물음에 답하여 보자.

	흡연	비흡연	합계
남자	61	7	68
여자	27	5	32
합계	88	12	100

1. 뽑힌 환자가 과거 흡연하였을 확률을 구하여 보자.
2. 뽑힌 환자가 과거 흡연하였던 남자일 확률을 구하여 보자.
3. 뽑힌 환자가 과거 흡연을 하였을 때, 그 환자가 남자일 확률을 구하는 방법에 대하여 말하여 보자.

탐구 활동에서 과거 흡연하였던 환자가 뽑히는 사건을 A라 하고, 남자가 뽑히는 사건을 B라고 하자. 그러면 과거 흡연을 하였던 환자가 남자인 사건은 $A\cap B$이다.

새로 나온 용어와 기호

- 조건부확률(條件附確率, conditional probability)
- $\mathrm{P}(B|A)$

생각 열기 참/고/자/료

흡연과 폐암과의 관계에 관한 의학적 연구는 20세기 이후 흡연 사망률이 급증하였는데 이것이 담배소비량의 증가와 일치하는 것에 의심을 둔 데서 시작되었다. 1900년 이전까지만 해도 폐암은 희귀한 것이었는데, 1900년대에 들어서면서 미국과 유럽에서 폐암 사망률이 급속하게 증가하였으며, 1950년대 중반에 들어서면서 미국과 영국 등에서 폐암 사망률이 1위로 올라섰기 때문에 1950년대부터 흡연과 폐암의 관계에 관한 본격적 연구가 시작되었다. 폐암의 발생에는 20년에서 25년의 잠복 기간이 있기 때문에 오랜 시간이 흐른 뒤에야 흡연의 피해가 나타나게 된 것이다.

01 조건부확률

소단원 지도 목표

① 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.
② 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 확률과 조건부확률의 차이점을 구체적인 예를 들어 이해할 수 있도록 지도한다.

2. 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 $\mathrm{P}(A)>0$인 경우에 한하여 정의된다는 점을 강조한다.

3. $\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(A|B)$를 혼동하지 않도록 지도한다.

4. 확률의 곱셈정리는 조건부확률의 변형된 표현임을 알게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 사건이 일어날 확률은 표본공간에 따라 변할 수 있다는 것을 알게 하여 이를 통해 조건부확률의 의미를 이해하게 하려는 것이다.

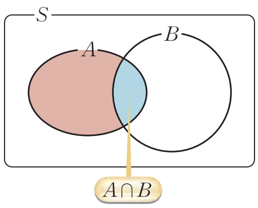
1. 전체 환자 100명 중 과거 흡연하였던 환자는 88명이므로 구하는 확률은 $\frac{88}{100}=\mathbf{\frac{22}{25}}$이다.

2. 전체 환자 100명 중 과거 흡연하였던 남자 환자는 61명이므로 구하는 확률은 $\mathbf{\frac{61}{100}}$이다.

3. 과거 흡연하였던 환자는 88명이고 이 중 남자 환자는 61명이므로 구하는 확률은 $\mathbf{\frac{61}{88}}$이다.

본문 해설

❶ 조건부확률은 벤 다이어그램을 이용하면 이해하기 쉽다.
사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A가 일어났다는 조건 하에서 생각하므로 A를 새로운 표본공간, $A\cap B$를 이 표본공간에서의 사건으로 생각하여 계산한다.



❷ $\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(A|B)$를 혼동하지 않아야 한다. $\mathrm{P}(B|A)$는 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률을 말하고, $\mathrm{P}(A|B)$는 사건 B가 일어났을 때 사건 A가 일어날 확률을 말한다. 즉,

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(B)>0)$$

교과서 82 쪽

임의로 뽑은 환자가 과거 흡연을 하였다고 할 때, 그 환자가 남자일 확률은 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률이므로 $\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{61}{88}$이다.

$\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$는 사건 A를 새로운 표본공간으로 생각하고 표본공간 A에서 사건 $A\cap B$가 일어날 확률을 의미한다.

❶ 일반적으로 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다고 가정할 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 **조건부확률**이라 하고, 기호로

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$$

와 같이 나타낸다.

표본공간 S에서 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이다. 그런데

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **조건부확률**

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

보기 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$이면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}$$

문제 1 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$일 때, $\mathrm{P}(A|B)$를 구하여라.

1

목표| 간단한 계산을 통해 조건부확률을 이해하게 한다.

풀이| $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{P(B)}$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{10}}=\mathbf{\frac{2}{7}}$$

지/도/자/료

(1) 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

① 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률:

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

② 사건 B가 일어났을 때의 사건 A^C의 조건부확률:

$$\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

③ 사건 B가 일어나지 않았을 때의 사건 A의 조건부확률:

$$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$$

④ 사건 B가 일어나지 않았을 때의 사건 A^C의 조건부확률:

$$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$$

(2) 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립한다.
(단, $P(A)>0$)

① $0\le \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\le 1$

② $\mathrm{P}(S|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap S)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1$

③ $\mathrm{P}(\varnothing|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap\varnothing)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(\varnothing)}{\mathrm{P}(A)}=0$

교과서 83 쪽

예제 01 K 고등학교 신입생 중에서 D 중학교 출신이 차지하는 비율은 20 %이고, D 중학교 출신 남학생은 전체의 9 %라고 한다. 이 고등학교 신입생 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 D 중학교 출신이었을 때, 이 학생이 남학생일 확률을 구하여라.

풀이 K 고등학교 신입생 중에서 임의로 한 학생을 뽑을 때, 그 학생이 D 중학교 출신인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{100}$$

따라서 구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{100}}{\frac{1}{5}}=\frac{9}{20}$$

답 $\frac{9}{20}$

문제 2 한 개의 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나왔을 때, 그 눈의 수가 소수일 확률을 구하여라.

문제 3 선물용 과자 세트에 들어 있는 초콜릿과 쿠키의 비율은 각각 20 %, 30 %이다. 이때 아몬드가 들어 있는 초콜릿은 전체의 5 %라고 한다. 이 선물용 과자 세트에서 임의로 고른 과자가 초콜릿이었을 때, 아몬드가 들어 있는 초콜릿일 확률을 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

어느 전자 우편 사이트는 ‘스팸 메일(spam mail) 차단’ 기능을 사용하면 광고성 우편 중에서 95 %를 차단하지만, 정상 우편도 2 % 차단한다고 한다. 이 기능을 이용하여 광고성 우편 100통과 정상 우편 100통을 검사하였다. 이 중에서 임의로 뽑은 한 통의 우편이 차단된 우편이었을 때, 이 우편이 광고성 우편일 확률을 구하여 보자.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{5}}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 조건부확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 광고성 우편 100통 중에서 차단된 우편은 95통이고, 정상 우편 100통 중에서 차단된 우편은 2통이므로 차단된 우편은 모두 97통이다.
따라서 임의로 한 통의 우편을 뽑았을 때, 차단된 우편인 사건을 A, 광고성 우편인 사건을 B라고 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{95}{200}}{\frac{97}{200}}=\mathbf{\frac{95}{97}}$$

2

목표| 조건부확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 한 개의 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

3

목표| 조건부확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 선물용 과자 세트에서 임의로 고른 과자가 초콜릿인 사건을 A, 아몬드가 들어 있는 사건을 B라고 하면

지/도/자/료 전확률정리

사건 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n$이 표본공간 S의 한 분할이고, $\mathrm{P}(A_i)>0\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이면 임의의 사건 B에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1)+\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2)+\cdots\\&\quad+\mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}(B|A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)\end{aligned}$$

전확률정리는 주어진 사건 B의 확률을 계산할 때, 그 사건의 원인을 여러 가지로 나누어서 각 원인에 대한 조건부확률 $\mathrm{P}(B|A_i)$와 그 원인이 되는 확률 $\mathrm{P}(A_i)$의 가중합으로 구할 수 있다는 것을 보여준다.
전확률정리를 이용하여 다음의 베이즈 정리를 얻을 수 있다.
사건 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n$이 표본공간의 분할이고 $\mathrm{P}(A_i)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_k|B)&=\frac{\mathrm{P}(A_k\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A_k\cap B)}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i\cap B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}\end{aligned}$$

교과서 84 쪽

확률의 곱셈정리란 무엇인가?

탐구 활동 다음 표는 어느 DVD 대여점이 가지고 있는 액션 영화와 코미디 영화의 DVD 개수를 조사하여 나타낸 것이다. 원희가 이 중에서 임의로 한 편을 선택하려고 할 때, 물음에 답하여 보자.

	액션 영화	코미디 영화	합계
한국 영화	150	200	350
외국 영화	300	150	450
합계	450	350	800

1. 원희가 한국 영화 한 편을 선택할 확률을 구하여 보자.
2. 원희가 한국 영화 중에서 한 편을 선택하였다고 할 때, 그 영화가 코미디 영화일 확률을 구하여 보자.
3. 원희가 한국 코미디 영화 한 편을 선택할 확률을 구하여 보고, **1**, **2**에서 구한 확률과 어떤 관계가 있는지 말하여 보자.

조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 의 양변에 $\mathrm{P}(A)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$

를 얻는다.

같은 방법으로 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ 의 양변에 $\mathrm{P}(B)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

를 얻는다.

따라서 조건부확률을 이용하면 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 확률을 구할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(B)>0)$$

문제 4 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A|B)=\frac{2}{3}$ 일 때, $\mathrm{P}(B|A)$를 구하여라.

교과서 85 쪽

예제 02 상자 안에 모양과 크기가 같은 자두 맛 사탕이 6개, 딸기 맛 사탕이 4개 들어 있다. 이 상자 안에서 차례로 2개의 사탕을 꺼낼 때, 2개 모두 자두 맛 사탕일 확률을 구하여라.

(단, 꺼낸 사탕은 다시 넣지 않는다.)

풀이 첫 번째 꺼낸 사탕이 자두 맛 사탕인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 사탕이 자두 맛 사탕인 사건을 B라고 하자.

첫 번째에 자두 맛 사탕을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

첫 번째 꺼낸 사탕이 자두 맛 사탕일 때, 두 번째 꺼낸 사탕도 자두 맛 사탕일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

문제 5 어느 학급의 청소 당번 10명이 제비뽑기로 복도 청소 2명과 교실 청소 8명을 정하려고 한다. 두 번째 제비를 뽑은 학생이 복도 청소를 할 확률을 구하여라. (단, 꺼낸 제비는 다시 넣지 않는다.)

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

다음 대화를 보고 몇 번째로 제비를 뽑는 것이 가장 유리한지 토의하여 보자.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률 $P(A\cap B)$가 조건부확률의 변형된 식임을 알게 하기 위한 것이다.

1. 액션 영화와 코미디 영화의 DVD는 모두 800개이고 이 중 한국 영화는 350개이므로 구하는 확률은

$\dfrac{350}{800}=\mathbf{\dfrac{7}{16}}$

2. 한국 영화의 DVD는 350개이고 이 중 코미디 영화는 200개이므로 구하는 확률은

$\dfrac{200}{350}=\mathbf{\dfrac{4}{7}}$

3. 한국 코미디 영화 한 편을 선택할 확률은

$\dfrac{200}{800}=\dfrac{1}{4}$이고, 이것은 **1**, **2**에서 구한 확률의 곱과 같다.

4

목표 | 간단한 계산을 통해 확률의 곱셈정리를 이해하게 한다.

풀이 | $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}}=\mathbf{\dfrac{5}{6}}$

5

목표 | 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 첫 번째 제비를 뽑은 학생이 복도 청소를 하는 사건을 A, 두 번째 제비를 뽑은 학생이 복도 청소를 하는 사건을 B라고 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\mathbf{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

교과서 86 쪽

02 사건의 독립과 종속

● 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

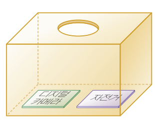
사건의 독립과 종속이란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

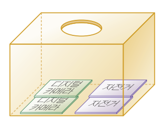
어느 동아리 행사에서 최종 선발된 4명의 회원에게 다음과 같은 두 가지 방법으로 추첨을 통해 상품인 디지털 카메라 2대와 자전거 2대를 지급하려고 한다. 물음에 답하여 보자.

상자 안에 디지털 카메라, 자전거라고 적힌 카드를 각각 1장씩 넣고, 한 사람씩 차례로 꺼낸다. 이때 꺼낸 카드는 지급할 상품이 남아 있으면 다시 넣고 남아 있지 않으면 넣지 않는다.



〈방법 1〉

상자에 디지털 카메라, 자전거라고 적힌 카드를 각각 2장씩 넣고 한 사람씩 차례로 꺼낸다. 이때 꺼낸 카드는 다시 넣지 않는다.



〈방법 2〉

1. 〈방법 1〉과 〈방법 2〉의 각각의 경우에 대하여 첫 번째 회원이 자전거가 적힌 카드를 꺼냈을 때, 두 번째 회원도 자전거가 적힌 카드를 꺼낼 확률을 구하여 보자.
2. 〈방법 1〉과 〈방법 2〉의 각각의 경우에 대하여 첫 번째 회원의 결과가 두 번째 회원의 결과에 영향을 미치는지 말하여 보자.

02 사건의 독립과 종속

소단원 지도 목표

① 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.

② 독립시행의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 두 사건의 배반과 독립 및 종속의 의미를 정확히 이해해 혼동하지 않도록 지도한다.

2. 두 사건 A와 B가 독립이면 A와 B^C, A^C과 B, A^C과 B^C도 독립임에 유의하여 지도한다.

3. 독립시행의 확률은 독립시행한 횟수와 사건 A가 일어날 확률 및 일어난 횟수에 따라 결정됨을 이해하도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

• 독립(獨立, independence)
• 종속(從屬, dependence)
• 독립시행(獨立試行, independent trials)

사고력 기르기 의사소통

출제 의도 | 제비를 뽑는 순서에 따라 유 · 불리가 달라지는지 확률의 곱셈정리를 활용하여 확인해 볼 수 있게 한다.

풀이 | 첫 번째, 두 번째, 세 번째 제비를 뽑을 때 당첨 제비를 뽑는 사건을 각각 A, B, C라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C)=&\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\\&+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}\\&+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\\&+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

A	B	C
○	○	○
○	×	○
×	○	○
×	×	○

따라서 뽑는 순서에 상관없이 당첨 제비가 나올 확률은 같다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 경품이 적힌 카드를 꺼내 확인한 후 다시 넣는 경우와 다시 넣지 않는 경우의 확률을 구해 봄으로써 두 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하게 하려는 것이다.

1. 〈방법 1〉의 경우 : 꺼낸 카드를 다시 넣으므로 두 번째 카드를 꺼내는 회원이 자전거가 적힌 카드를 뽑을 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

〈방법 2〉의 경우 : 꺼낸 카드를 다시 넣지 않으므로 두 번째 카드를 꺼내는 회원이 자전거가 적힌 카드를 뽑을 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

2. 〈방법 1〉의 경우는 첫 번째 회원이 꺼낸 카드를 다시 넣으므로 두 번째 꺼내는 회원의 결과에 영향을 미치지 않는다. 〈방법 2〉의 경우는 꺼낸 카드를 다시 넣지 않으므로 첫 번째 회원이 어떤 카드를 꺼내는가가 두 번째 카드를 꺼내는 회원의 결과에 영향을 미친다.

교과서 87 쪽

어떤 사건이 일어나거나 일어나지 않을 확률이 다른 사건이 일어나거나 일어나지 않을 확률에 영향을 미치는 경우가 있고, 그렇지 않은 경우가 있다.

탐구 활동에서 첫 번째 회원이 자전거가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 A, 두 번째 회원이 자전거가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라고 하자.

〈방법 1〉의 경우는 첫 번째 꺼낸 카드를 다시 상자에 넣기 때문에 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미치지 않는다. 즉,

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

이 성립한다.

이와 같이 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미치지 않을 때, 즉 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 **독립**이라고 한다.

두 사건 A와 B가 서로 독립이면 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

가 성립한다.

역으로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고 $\mathrm{P}(A)>0$이면 확률의 곱셈정리에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$이므로 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)$이다.

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

한편 〈방법 2〉의 경우는 첫 번째 꺼낸 카드를 다시 상자에 넣지 않기 때문에 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미친다. 즉,

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}$$

가 성립한다.

이와 같이 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미칠 때, 즉 $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B|A^C)$일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 **종속**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **독립사건의 곱셈정리**

두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

교과서 88 쪽

예제 01 한 개의 주사위를 던져서 소수의 눈이 나오는 사건을 A, 4 이상의 눈이 나오는 사건을 B, 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 C라고 하자. 이때 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지 말하여라.

(1) 사건 A와 B (2) 사건 B와 C (3) 사건 A와 C

두 사건 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
두 사건 A와 B가 서로 종속이면 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

풀이 $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{4, 5, 6\}$, $C=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{2}{3}$$

또 $A\cap B=\{5\}$, $B\cap C=\{6\}$, $A\cap C=\{2, 3\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}$$

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$이므로 사건 A와 B는 서로 종속이다.

(2) $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$이므로 사건 B와 C는 서로 종속이다.

(3) $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 사건 A와 C는 서로 독립이다.

답 (1) 종속 (2) 종속 (3) 독립

문제 1 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수가 소수인 사건을 A, 짝수인 사건을 B, 12의 약수인 사건을 C라고 하자. 이때 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지 말하여라.

(1) 사건 A와 B (2) 사건 B와 C (3) 사건 A와 C

발전 **문제 2** 두 사건 A와 B가 서로 독립일 때, 다음 두 사건도 서로 독립임을 설명하여라.

(단, $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$)

(1) 사건 A와 B^C (2) 사건 A^C과 B (3) 사건 A^C과 B^C

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

명제 '두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.'가 참인지 거짓인지 토의하여 보자. (단, $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$)

본문 해설

❶ 두 사건이 독립임을 보이기 위해서 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$임을 보이거나 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 보이면 된다.

1

목표 | 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하게 한다.

풀이 | $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$$

또 $A\cap B=\{2\}$, $B\cap C=\{2, 4, 6\}$, $A\cap C=\{2, 3\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10},\ \mathrm{P}(B\cap C)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{5}$$

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$이므로
사건 A와 B는 서로 종속이다.

(2) $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{3}{10}\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$이므로
사건 B와 C는 서로 종속이다.

(3) $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{5}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로
사건 A와 C는 서로 독립이다.

2

목표 | 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C과 B, A^C과 B^C도 서로 독립임을 이해하게 한다.

풀이 | 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

(1) $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

따라서 두 사건 A와 B^C은 서로 독립이다.

교과서 89 쪽

독립시행의 확률이란 무엇인가?

탐구 활동

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 1의 눈이 나오는 경우를 ○, 1의 눈이 나오지 않는 경우를 ×로 나타낼 때, 가능한 모든 경우를 아래 표에 나타내어 보자.
2. 각각의 사건이 일어날 확률을 구하여 아래 표에 나타내어 보자.
3. 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률을 구하여 보자.

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$

주사위나 동전을 여러 번 던지는 경우와 같이 동일한 조건으로 같은 시행을 반복할 때, 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 영향을 미치지 않는 경우가 있다.

❶ 이와 같이 어떤 시행을 반복하는 경우 매 시행마다 일어나는 사건이 서로 독립일 때, 이러한 시행을 **독립시행**이라고 한다.

탐구 활동에서 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 2번 나오는 경우는 ${}_4\mathrm{C}_2$가지이다.

이때 주사위를 던지는 각 시행은 서로 독립이고, 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$, 1의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{5}{6}$이므로 각 경우가 일어날 확률은 모두 $\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$이다.

그리고 ${}_4\mathrm{C}_2$가지의 사건은 서로 배반사건이므로 한 개의 주사위를 4번 던지는 독립시행에서 1의 눈이 2번 나올 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

이다.

(2) $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}$
$=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C)$

따라서 두 사건 A^C과 B는 서로 독립이다.

(3) $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)P(B)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

따라서 두 사건 A^C과 B^C은 서로 독립이다.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 배반사건과 독립 사이에는 어떤 관계가 있는지 이해하게 한다.

풀이| 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면
$\mathrm{P}(A\cap B)=0$이다.

또 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)>0$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.
따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니므로 주어진 명제는 거짓이다.

예 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 3 이하의 눈이 나오는 사건을 A라 하고 4 이상의 눈이 나오는 사건을 B라고 할 때,
$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{4, 5, 6\}$이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0$
따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=0\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$
이므로 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이지만 서로 독립은 아니다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주사위를 던지는 실험을 통해 독립시행의 의미를 이해하고, 그 확률을 계산하는 방법을 이해하게 하려는 것이다.

1, 2.

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$
○	×	○	×	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$
○	×	×	○	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$
×	○	○	×	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$
×	○	×	○	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$
×	×	○	○	$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

3. 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 두 번 나오는 사건은 위의 6가지 사건의 합사건이고, 이들 6가지 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\right)\times6=\mathbf{\frac{25}{216}}$

본문 해설

❶ 독립시행의 확률을 구할 때는 각 사건이 일어날 확률을 구하고, n번의 독립시행에서 그 경우가 몇 번 일어나는가를 생각해야 한다.

교과서 90 쪽

일반적으로 독립시행에 대하여 다음이 성립한다.

❶ **독립시행의 확률**

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, 이 시행을 n회 반복한 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$$_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}(1-p)^{n-r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

예제 02 어느 사격 선수는 총을 한 발 사격할 때, 과녁의 10점 부분에 맞힐 확률이 $\frac{7}{10}$이라고 한다. 이 선수가 5발을 사격하여 과녁의 10점 부분에 3번 맞힐 확률을 구하여라.

풀이 5발을 사격하여 과녁의 10점 부분에 3번 맞힐 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$$_{5}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{7}{10}\right)^{3}\left(\frac{3}{10}\right)^{2}=10\times\frac{343}{1000}\times\frac{9}{100}=\frac{3087}{10000}$$

답 $\frac{3087}{10000}$

문제 3 어느 야구팀의 투수는 공을 던졌을 때, 80 %는 스트라이크가 되고 나머지 20 %는 볼이 된다고 한다. 이 투수가 던진 4개의 공 중에서 3개가 스트라이크가 될 확률을 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

파스칼은 부득이하게 중간에 중지한 시합의 상금의 분배에 관한 드 메레의 질문이 적힌 편지를 받고 A는 48피스톨, B는 16피스톨을 나누어 가지면 된다고 답장을 보냈다. 파스칼의 해결 방법이 맞는지 A와 B가 이길 확률을 각각 구하여 알아보자.

본문 해설

❶ 독립시행의 확률은 이항정리

$$(p+q)^{n}=\sum_{r=0}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{r}p^{r}q^{n-r}$$

에서 일반항과 그 꼴이 같음을 이해한다.

3

목표| 독립시행의 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 이 투수가 매번 공을 던졌을 때 스트라이크가 될 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

따라서 이 투수가 던진 4개의 공 중에서 3개가 스트라이크가 될 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$$_{4}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{3}\left(\frac{1}{5}\right)=\mathbf{\frac{256}{625}}$$

단원 과제

목표| 확률의 곱셈정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| A가 2번, B가 1번을 이긴 상태에서 앞으로 일어날 수 있는 모든 경우는

(i) A가 이기는 경우

(ii) B가 연속해서 2번 이기는 경우

(iii) B가 이긴 다음 A가 이기는 경우

의 3가지이다.

이때 시합을 하는 각 시행은 독립이고 A와 B가 각각 32피스톨씩 돈을 내어 먼저 3번 이기는 사람이 64피스톨을 모두 갖기로 하였으므로

$$(\text{A의 기대 금액})=64\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=48(\text{피스톨})$$

$$(\text{B의 기대 금액})=64\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=16(\text{피스톨})$$

따라서 파스칼의 답변과 같이 A, B에게 각각 48피스톨, 16피스톨씩 분배하는 것이 맞다.

읽/기/자/료 몬테카를로 시뮬레이션

3점 슛 성공률이 40 %인 농구선수가 있는데, 그는 게임당 평균 20개의 3점 슛을 던진다. 그렇다면 이 선수가 20개의 3점 슛을 던져 11개를 성공시킬 확률은 과연 얼마일까?

① 먼저 1에서 5 사이의 정수를 임의로 생성하도록 컴퓨터에게 요구한 다음 컴퓨터가 출력한 숫자가 1이나 2인가를 살펴본다.

② 1에서 5 사이 숫자 2개는 나올 확률이 $\frac{2}{5}$이다. 따라서 만약 그 숫자가 1 또는 2이면 그 선수가 3점 슛을 성공시킨 것으로 간주하고, 반대로 3, 4, 5가 나오면 실패한 것으로 간주한다.

③ 1과 5 사이의 수를 무작위로 20개 생성하도록 컴퓨터에게 요구하고 그 중 정확히 11개가 1이나 2가 되는지 살펴본다. 그리하여 이 데이터를 곧바로 3점 슛 성공률이 40 %인 농구선수가 20번의 슛에서 정확히 11개의 슛을 성공시킨 경우로 간주한다.

④ 이 단순한 조작 과정을 10000번 반복 수행하라고 요구하면서 동시에 그 중에서 20번의 3점 슛 가운데 11번의 슛을 성공시킨 게임의 횟수를 세도록 컴퓨터에게 시킨다.

⑤ 끝으로 컴퓨터에 나타난 횟수를 10000으로 나눈다. 그러면 주어진 문제에서 주장된 실제 확률에 아주 가까운 근삿값을 얻을 수가 있다.

교과서 91 쪽

중단원 기초

[해답 p.171]

수준별 학습

1 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라고 하자. $a+b\geq 10$일 때, $a\geq 5$일 확률을 구하여라.

01 조건부확률

2 오른쪽 표는 어느 반의 학생 35명을 대상으로 스마트폰 사용 여부를 조사하여 나타낸 것이다. 이 학급에서 남학생 한 명을 임의로 뽑을 때, 그 학생이 스마트폰을 사용할 확률을 구하여라.

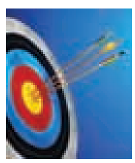
스마트폰 \ 성별	남	여	합계
사용함	12	13	25
사용 안 함	4	6	10
합계	16	19	35

01 조건부확률

3 10개의 제비 중에 1등 제비가 한 개, 2등 제비가 두 개 들어 있다. 하영이와 민서가 순서대로 제비를 한 개씩 뽑을 때, 하영이가 2등 제비를 뽑고 민서가 1등 제비를 뽑을 확률을 구하여라. (단, 꺼낸 제비는 다시 넣지 않는다.)

01 조건부확률
확률의 곱셈정리

4 세 명의 양궁 선수 A, B, C가 한 발의 활을 쏘아 과녁의 10점에 명중시킬 확률이 각각 0.7, 0.8, 0.9라고 한다. 이 세 명의 선수가 활을 한 발씩 쏘았을 때, 세 명 모두 10점에 맞히지 못했을 확률을 구하여라.



02 사건의 독립과 종속
독립사건의 곱셈정리

5 종철이는 문제를 풀 때 평균적으로 4문제를 풀면 3문제를 맞힌다고 한다. 5문제가 출제된 어떤 시험에서 4문제 이상 맞히면 합격이라고 할 때, 종철이가 시험에 합격할 확률을 구하여라.

02 사건의 독립과 종속
독립시행의 확률

중/단/원 기초

1

목표| 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 각각 a, b일 때, $a+b\geq 10$인 사건을 A, $a\geq 5$인 사건을 B라고 하면

$A=\{(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{36}$

따라서 구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{6}}=\mathbf{\frac{5}{6}}$$

2

목표| 조건부확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 학급에서 학생 중 임의로 한 명을 뽑을 때 그 학생이 남학생인 사건을 A, 스마트폰을 사용하는 학생인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{16}{35}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{12}{35}$

따라서 구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{12}{35}}{\frac{16}{35}}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

3

목표| 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 하영이가 2등 제비를 뽑는 사건을 A, 민서가 1등 제비를 뽑는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{9}=\mathbf{\frac{1}{45}}$$

4

목표| 독립사건의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 세 명의 양궁 선수 A, B, C가 각각 한 발의 활을 쏘아 과녁의 10점에 명중시키지 못할 확률은 0.3, 0.2, 0.1이다.

따라서 세 선수 모두 10점에 맞히지 못할 확률은

$0.3\times 0.2\times 0.1=\mathbf{0.006}$

5

목표| 독립시행의 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 4문제를 맞출 확률은 ${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{405}{1024}$

5문제를 맞출 확률은 ${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{243}{1024}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\mathbf{\frac{81}{128}}$

교과서 92 쪽

중단원 기본

[해답 p.171]

수준별 학습

1 어느 반에서 축구를 좋아하는 학생은 전체의 $\frac{3}{5}$이고, 축구를 좋아하는 남학생은 전체의 $\frac{2}{7}$이다. 이 반에서 임의로 뽑은 한 명이 축구를 좋아하는 학생이었을 때, 그 학생이 남학생일 확률을 구하여라.

01 조건부확률

2 노란 공 4개와 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 나경이와 수현이가 순서대로 번갈아 가며 공을 한 개씩 꺼낼 때, 수현이가 먼저 빨간 공을 꺼낼 확률을 구하여라. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

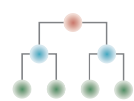
01 조건부확률
확률의 곱셈정리

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음 세 사건 A, B, C 중에서 서로 독립인 사건을 모두 찾아라.

A: 첫 번째에 짝수의 눈이 나오는 사건
B: 두 번째에 3의 배수의 눈이 나오는 사건
C: 첫 번째는 소수의 눈이 나오고 두 번째는 홀수의 눈이 나오는 사건

02 사건의 독립과 종속

4 어느 야구 대회에 4개 팀이 참가하여 오른쪽 그림과 같이 토너먼트 방식으로 경기를 하려고 한다. 추첨으로 대진표가 결정된다고 할 때, 이 대회에 참가한 A팀과 B팀이 서로 경기를 하게 될 확률을 구하여라.
(단, 각 팀이 이길 확률은 서로 같다.)



02 사건의 독립과 종속
독립사건의 곱셈정리

5 윷짝의 둥근 면과 평평한 면이 나올 확률이 일정한 윷짝 4개를 던질 때, '모'가 나올 확률이 0.0256이라고 한다. 이 윷짝 4개를 던질 때, '걸'이 나올 확률을 구하여라.

02 사건의 독립과 종속
독립시행의 확률

중/단/원 기본

1

목표| 조건부확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 이 반에서 임의로 뽑은 한 명의 학생이 축구를 좋아하는 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathbf{\frac{10}{21}}$

2

목표| 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 수현이가 먼저 빨간 공을 꺼낼 확률은

$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\mathbf{\frac{13}{35}}$

3

목표| 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하게 한다.

풀이| $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$이고

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{12}$

(i) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(ii) $\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로 사건 B와 C는 서로 독립이다.

(iii) $\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 사건 A와 C는 서로 종속이다.

4

목표| 독립사건의 곱셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 4개 팀을 2개의 조로 나누는 모든 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2!}=3$

A팀과 B팀이 같은 조에 속하면 반드시 경기를 하게 되므로 이때의 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

한편 A팀과 B팀이 다른 조에 속할 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 이때 A팀과 B팀이 경기를 하려면 두 팀이 모두 처음 경기에서 이겨야 한다. 두 팀이 경기에서 이기고 지는 사건은 서로 독립이므로 두 팀이 결승전을 치르게 될 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

5

목표| 독립시행의 확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 한 개의 윷짝을 던져서 윷짝의 둥근 면이 나올 확률을 p라고 하자.

윷짝 4개를 던져서 '모'가 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_4p^4$

이때 '모'가 나올 확률이 $0.0256=\left(\frac{2}{5}\right)^4$이므로 $p=\frac{2}{5}$

따라서 '걸'이 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3=\mathbf{\frac{216}{625}}$

교과서 93 쪽

중단원 실력

[해답 p.172]

수준별 학습

1 주머니 A에는 파란 색연필 2자루, 초록 색연필 4자루가 들어 있고, 주머니 B에는 파란 색연필 5자루, 초록 색연필 3자루가 들어 있다. 주머니 A에서 2자루의 색연필을 동시에 꺼내 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 2자루의 색연필을 동시에 꺼냈더니 2자루 모두 초록 색연필이었다고 할 때, 주머니 A에서 주머니 B로 옮겨진 색연필이 초록 색연필 2자루일 확률을 구하여라.

01 조건부확률

2 주머니 속에 10개의 배드민턴공이 들어 있는데 이 중 6개는 사용한 적이 없는 새 공이다. 어느 날 배드민턴을 하면서 이 주머니에서 2개의 공을 임의로 꺼내 사용하고 다시 넣었다. 그 다음 날 다시 배드민턴을 하기 위하여 임의로 2개의 공을 꺼냈을 때, 2개 모두 사용한 적이 없는 새 공일 확률을 구하여라.

01 조건부확률
확률의 곱셈정리

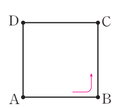
3 A 음료수에는 10개 중 1개의 비율로 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨가 써져 있는데, 이 뚜껑을 가져온 고객에게는 A 음료수 한 병을 사은품으로 준다고 한다. A 음료수를 5병 구입한 사람이 사은품으로 2병의 A 음료수를 받을 확률을 $\frac{3^b}{2\times10^a}$라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a와 b는 자연수이다.)

02 사건의 독립과 종속
독립사건의 곱셈정리

4 움직이는 점 P가 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 변 위를 주사위를 한 번 던질 때마다 다음과 같은 규칙으로 움직인다.

02 사건의 독립과 종속
독립시행의 확률

• 짝수의 눈이 나오면 시계 반대 방향으로 1만큼 움직인다.
• 홀수의 눈이 나오면 시계 반대 방향으로 2만큼 움직인다.



주사위를 3번 던질 때, 점 A를 출발한 점 P가 다시 점 A에 돌아올 확률을 구하여라.

중/단/원 실력

1

목표| 조건부확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 주머니 A에서 주머니 B로 옮겨진 2자루의 색연필이 모두 초록 색연필인 사건을 A, 주머니 B에서 꺼낸 2자루의 색연필이 모두 초록 색연필인 사건을 B라고 하면 사건 B가 일어나는 경우는 다음의 3가지이다.

옮겨진 색연필	사건 B가 일어날 확률
파란 색연필 2자루	$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{225}$
파란 색연필 1자루, 초록 색연필 1자루	$\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{16}{225}$
초록 색연필 2자루	$\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{4}{45}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{225}+\frac{16}{225}+\frac{4}{45}=\frac{37}{225}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{45}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathbf{\frac{20}{37}}$$

2

목표| 확률의 곱셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 다음 날 꺼낸 공 2개가 사용한 적이 없는 새 공인 사건을 A라고 하면 사건 A가 일어나는 각 경우에 대한 확률은

(i) 전날 사용한 2개가 모두 이전에 사용한 적이 있었던 공이고, 다음 날 꺼낸 공 2개가 모두 새 공인 경우: $\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{45}$

(ii) 전날 사용한 공 중 1개만 이전에 사용한 적이 있었던 공이고, 다음 날 꺼낸 공 2개가 모두 새 공인 경우:

$$\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{16}{135}$$

(iii) 전날 사용한 공 2개가 새 공이고, 다음 날 꺼낸 공 2개가 모두 새 공인 경우:

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{45}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{45}+\frac{16}{135}+\frac{2}{45}=\mathbf{\frac{28}{135}}$$

3

목표| 독립사건의 곱셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 사은품으로 2병의 A 음료수를 받는 사건을 A라고 하면, 사건 A가 일어나는 각 경우에 대한 확률은

(i) 5병 중 2병의 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨가 있고, 사은품으로 받은 2병의 병뚜껑에는 '한 병 더'라는 글씨가 없는 경우:

$${}_5C_2\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^3\times{}_2C_0\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^2=\frac{9^5}{10^6}$$

(ii) 5병 중 1병의 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨가 있고, 사은품으로 받은 1병의 병뚜껑에도 '한 병 더'라는 글씨가 있고, 또다시 받은 사은품의 병뚜껑에는 '한 병 더'라는 글씨가 없는 경우:

$${}_5C_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^4\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{9^5\times5}{10^7}$$

$\mathrm{P}(A)=\frac{9^5}{10^6}+\frac{9^5\times5}{10^7}=\frac{3^{11}}{2\times10^6}$이므로 $a+b=\mathbf{17}$

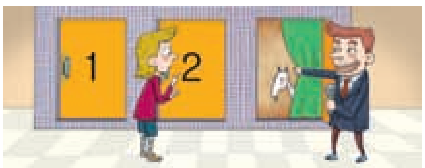
교과서 94 쪽

수행 과제

몬티 홀 문제

'몬티 홀 문제'는 미국의 텔레비전 프로그램 사회자인 몬티 홀(Monty Hall)의 이름에서 유래되었다. 그 내용이 다음과 같을 때, 물음에 답하여 보자.

3개의 문이 있는데 하나의 문 뒤에는 고급 자동차가, 나머지 2개의 문 뒤에는 염소가 숨겨져 있다. 출연자는 이 3개의 문 중에서 하나를 선택하여 문 뒤에 있는 상품을 받게 되는데, 출연자가 하나의 문을 선택하면 어떤 문 뒤에 자동차가 있는지 알고 있는 사회자는 나머지 2개의 문 중에서 염소가 있는 문을 하나 열어 보여 준다. 그리고 출연자에게 자신이 선택했던 문을 바꿀 수 있는 기회를 한 번 준다. 이때 출연자는 자신이 선택했던 문을 바꾸는 것이 유리한가?



| 과 제 | 1 웹사이트 http://www.grand-illusions.com/simulator/montysim.htm을 방문하여 선택한 문을 바꾸지 않는 경우(keep)와 선택한 문을 바꾸는 경우(change)를 300번씩 시행하여 고급 자동차를 받을 통계적 확률을 각각 구하여 보자.

| 과 제 | 2 출연자가 자신이 선택한 문을 바꾸지 않는 경우와 바꾸는 경우 중 어느 쪽이 유리한지 조건부확률을 이용해 계산하여 보자.

교과서 95 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 확률의 뜻과 활용

시행

같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰

수학적 확률과 통계적 확률

(1) 어떤 시행에서 표본공간 S의 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}$$

(2) 일정한 조건에서 같은 시행을 n번 반복하였을 때 사건 A가 일어난 횟수 r_n에 대하여 시행 횟수 n이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

확률의 기본 성질

표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여

(1) $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$

(2) $A=S$이면 $\mathrm{P}(S)=1$

(3) $A=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A)=0$

확률의 덧셈정리

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

여사건의 확률

임의의 사건 A의 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

2 조건부확률

조건부확률

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$
$$=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(B)>0)$$

사건의 독립과 종속

(1) 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미치지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$$

일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 독립이라고 한다.

한편 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미칠 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)\ne\mathrm{P}(B|A^C)$$

일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 종속이라고 한다.

(2) 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
(단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

독립시행의 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, 이 시행을 n회 반복한 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}\ (r=0, 1, 2, \cdots, n)$$

| 용어와 기호 | 시행, 수학적 확률, 통계적 확률, 여사건, 배반사건, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)$

4

목표| 독립시행의 확률을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| A–B–C–D–A는 거리가 4이므로 한 번은 홀수가 나와야 한다. 따라서 주사위를 3번 던질 때, 짝수가 2번 나오는 확률을 구하면 ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$

수행 과제

● 수행 과제 의도

우리가 직관으로 느끼는 확률과 실제 확률의 차이를 경험함으로써 수학의 유용성을 경험할 수 있도록 한다.

과제 1 _풀이

웹사이트 http://www.grand-illusions.com/simulator/montysim.htm을 방문하여 시뮬레이션을 직접해 보고 결과를 확인할 수 있다.

과제 2 _풀이

출연자가 문 1을 선택했을 때, 사회자는 문 2를 열어 염소를 보여주었다고 하자. 그러면 자동차는 출연자가 선택한 문 1 뒤에 있거나 문 3 뒤에 있다.

(i) 자동차가 문 1 뒤에 있을 확률: 문 1 뒤에 자동차가 있는 사건을 A, 사회자가 문 2를 여는 사건을 B라고 하면, 사회자가 문 2를 열었을 때 자동차가 문 1 뒤에 있을 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

(ii) 자동차가 문 3 뒤에 있을 확률: 문 3 뒤에 자동차가 있는 사건을 C라고 하면, 사회자가 문 2를 열었을 때 자동차가 문 3 뒤에 있을 확률은

$$\mathrm{P}(C|B)=\frac{\mathrm{P}(C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

따라서 선택한 문을 바꾸는 것이 유리하다.

대/단/원 평가 문제

Ⅱ. 확률

선택형

1 남학생 3명과 여학생 5명이 한 줄로 설 때, 남학생끼리는 이웃하지 않을 확률은?

① $\frac{5}{28}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{5}{21}$ ④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

2 네 사람이 가위바위보를 할 때, 단 한 번의 가위바위보로 이긴 사람 1명이 가려질 확률은?

① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{14}{81}$ ④ $\frac{5}{27}$ ⑤ $\frac{16}{81}$

3 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

4 노란 사탕 4개, 파란 사탕 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 사탕을 꺼낼 때, 노란 사탕이 2개 이상 나올 확률은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{22}{35}$ ③ $\frac{23}{35}$ ④ $\frac{24}{35}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

5 집합 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$의 부분집합에 대하여 원소의 개수가 3개 이상인 부분집합 중에서 하나를 임의로 선택하였을 때, 그 집합의 모든 원소의 곱이 짝수일 확률은?

① $\frac{10}{11}$ ② $\frac{31}{33}$ ③ $\frac{94}{99}$ ④ $\frac{95}{99}$ ⑤ $\frac{32}{33}$

6 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수 중 작지 않은 수가 4일 때, 두 주사위의 눈의 수의 합이 6 이하일 확률은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

7 빨간 공과 노란 공을 합해서 10개가 들어 있는 주머니에서 갑, 을이 순서대로 공을 한 개씩 꺼낼 때, 을이 빨간 공을 꺼낼 확률이 $\frac{2}{5}$라고 한다. 주머니에 들어 있는 빨간 공의 개수는?
(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

8 두 사건 A와 B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

대/단/원 평가 문제

1

목표| 순열을 이용하여 경우의 수를 구해 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 8명이 한 줄로 서는 모든 경우의 수는 $8!$이다.
남학생끼리는 이웃하지 않게 서는 경우의 수는
$5!\times{}_6\mathrm{P}_3$이다.
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{5!\times{}_6\mathrm{P}_3}{8!}=\dfrac{5}{14}$

답 ④

2

목표| 수학적 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 네 사람이 가위바위보를 했을 때 일어나는 모든 경우의 수는 $3^4=81$
단 한 번의 시행으로 이긴 사람 1명이 가려지는 경우의 수는 $3\times4=12$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{81}=\dfrac{4}{27}$

답 ①

3

목표| 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)+\dfrac{1}{6}$이므로
$\left\{\mathrm{P}(B)+\dfrac{1}{6}\right\}\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$에서
$\{3\mathrm{P}(B)-1\}\{2\mathrm{P}(B)+1\}=0$
$\mathrm{P}(B)>0$이므로 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3},\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{6}$

답 ⑤

4

목표| 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 노란 사탕이 2개 나오는 사건을 A, 3개 나오는 사건을 B라고 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{18}{35},\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{4}{35}$
두 사건 A, B는 배반사건이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{22}{35}$

답 ②

5

목표| 조건부확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 3개 이상인 부분집합의 수는 $2^7-({}_7\mathrm{C}_0+{}_7\mathrm{C}_1+{}_7\mathrm{C}_2)=99$
이때 원소의 개수가 3개 이상인 부분집합 중에서 모든 원소의 곱이 홀수인 부분집합의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4=5$
따라서 모든 원소의 곱이 짝수인 부분집합의 수는
$99-5=94$이므로 구하는 확률은 $\dfrac{94}{99}$이다.

답 ③

6

목표| 조건부확률을 활용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수 중 작지 않은 수가 4인 사건을 A, 두 주사위의 눈의 수의 합이 6 이하인 사건을 B라고 하면
$A=\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)\}$
$A\cap B=\{(1, 4), (2, 4), (4, 2), (4, 1)\}$
이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{7}{36},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{9}$
따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{4}{7}$

답 ④

7

목표| 확률의 곱셈정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 빨간 공의 개수를 n이라고 하면 을이 빨간 공을 꺼내는 각 경우에 대한 확률은

(i) 갑이 빨간 공을 꺼내고 을도 빨간 공을 꺼내는 경우: $\dfrac{n}{10}\times\dfrac{n-1}{9}$

(ii) 갑이 노란 공을 꺼내고 을은 빨간 공을 꺼내는 경우: $\dfrac{10-n}{10}\times\dfrac{n}{9}$

각 경우는 서로 배반이므로 을이 빨간 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{n}{10}\times\frac{n-1}{9}+\frac{10-n}{10}\times\frac{n}{9}=\frac{2}{5}$$

이므로 $n=4$

답 ③

8

목표| 사건의 독립의 의미를 이해하게 한다.

풀이| 두 사건 A와 B가 독립이므로 두 사건 A와 B^C도 독립이다.

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{5}$에서

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{2}{5}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{15}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 ③

9

목표| 여사건의 확률과 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 환자 4명 모두 치유되지 않는 사건을 A라고 하면 구하려는 확률은 $\mathrm{P}(A^C)$이다.

$\mathrm{P}(A)={}_4\mathrm{C}_0\left(\dfrac{3}{5}\right)^0\left(\dfrac{2}{5}\right)^4=\dfrac{16}{625}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{16}{625}=\dfrac{609}{625}$

답 ④

교과서 97 쪽

[해답 p.173]

9 어떤 의약품의 치유율이 $\dfrac{3}{5}$이라고 한다. 이 의약품으로 4명의 환자를 치료할 때, 적어도 한 명이 치유될 확률은?

① $\dfrac{606}{625}$ ② $\dfrac{607}{625}$ ③ $\dfrac{608}{625}$ ④ $\dfrac{609}{625}$ ⑤ $\dfrac{122}{125}$

10 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수만큼 동전을 던질 때, 동전의 앞면이 2번 나올 확률은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{5}{16}$ ③ $\dfrac{17}{64}$ ④ $\dfrac{33}{128}$ ⑤ $\dfrac{53}{192}$

서답형

11 지상이가 돈을 인출하기 위하여 카드의 비밀번호를 입력하려고 한다. 비밀번호는 0부터 9까지의 숫자 중 4개의 숫자로 이루어지는데, 지상이는 서로 다른 홀수만을 이용하여 비밀번호를 만들었다는 것만 기억하고 있다. 비밀번호를 세 번 연속 잘못 입력하면 돈을 인출할 수 없다고 할 때, 지상이가 돈을 인출할 확률을 구하여라. (단, 한 번 입력한 번호는 다시 입력하지 않는다.)

12 흰 바둑돌 3개, 검은 바둑돌 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 참을 말하는 한 사람과 거짓을 말하는 한 사람 중 한 명에게 주머니에서 바둑돌을 한 개 꺼내어 보여 주었더니 흰 바둑돌이라고 말하였다. 이 바둑돌이 실제로 흰 바둑돌일 확률을 구하여라.

13 자연수 1, 2, 3, 4가 적혀 있는 공이 각각 1개, 2개, 3개, 4개씩 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내 확인하고 다시 넣는 시행을 5회 반복할 때, 같은 수가 적힌 2개의 공을 꺼낸 횟수가 3번일 확률은 $\dfrac{a}{9^5}$이다. 이때 자연수 a의 값을 구하여라.

14 두 탁구팀 A, B가 결승전에서 만났다. 각 세트에서 A, B 두 팀이 이길 확률은 각각 $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$이다. 5세트 중 3세트를 먼저 이기는 팀이 우승한다고 할 때, A팀이 우승할 확률을 구하여라.

|서|술|형|

15 주머니 A에는 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 빨간 공 3개와 파란 공 5개가 들어 있다. 먼저 주머니 A에서 카드를 한 장 꺼내 카드에 적혀 있는 수만큼 주머니 B에서 임의로 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 빨간 공이 1개일 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A^C|B^C)$을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

10

목표| 독립시행의 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 동전의 앞면이 2번 나오는 경우는 다음의 5가지이다.

주사위의 눈의 수	동전의 앞면이 2번 나올 확률
2	$\frac{1}{6}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0$
3	$\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1$
4	$\frac{1}{6}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$
5	$\frac{1}{6}\times{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$
6	$\frac{1}{6}\times{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{6}\left\{{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}=\frac{33}{128}$$

답 ④

11

목표 | 확률의 곱셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 서로 다른 홀수만을 이용하여 4개의 숫자를 써서 만들 수 있는 모든 비밀번호의 개수는 ${}_5P_4=120$

지상이가 돈을 인출할 수 있는 경우는 다음의 3가지이다.

1회	2회	3회	확률
○			$\frac{1}{120}$
×	○		$\frac{119}{120}\times\frac{1}{119}=\frac{1}{120}$
×	×	○	$\frac{119}{120}\times\frac{118}{119}\times\frac{1}{118}=\frac{1}{120}$

각 경우는 서로 배반이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{120}+\frac{1}{120}+\frac{1}{120}=\frac{1}{40}$ 답 $\frac{1}{40}$

12

목표 | 조건부확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 바둑돌을 꺼내어 보여 주었을 때 흰 바둑돌이라고 말하는 사건을 A, 바둑돌이 실제로 흰 바둑돌인 사건을 B라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{3}{7}$

답 $\frac{3}{7}$

13

목표 | 독립시행의 확률을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼냈을 때 공에 적힌 수가 같을 확률은 $\frac{{}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{9}$

주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 독립시행을 5회 반복할 때, 같은 수가 적힌 공을 꺼낸 횟수가 3번일 확률은 ${}_5C_3\left(\frac{2}{9}\right)^3\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{3920}{9^5}$이므로 $a=3920$ 답 3920

14

목표 | 독립시행의 확률과 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이 | A팀이 우승하는 각 경우에 대한 확률은

(i) 1, 2, 3세트를 계속 이기는 경우: $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(ii) 1, 2, 3세트 중 두 세트를 이기고 4세트를 이기는 경우: ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

(iii) 1, 2, 3, 4세트 중 두 세트를 이기고 5세트를 이기는 경우: ${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{8}{81}=\frac{17}{81}$ 답 $\frac{17}{81}$

15

목표 | 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수에 따라 주머니 B에서 빨간 공을 1개 뽑을 확률을 구해 보면

카드에 적혀 있는 수	빨간 공 1개를 뽑을 확률
1	$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_1}{{}_8C_1}=\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_1\times{}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{5}{28}$
3	$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_1\times{}_5C_2}{{}_8C_3}=\frac{5}{28}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{8}+\frac{5}{28}+\frac{5}{28}=\frac{27}{56}$ 답 $\frac{27}{56}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	카드에 적혀 있는 수가 1일 때 확률 구하기	30%
	카드에 적혀 있는 수가 2일 때 확률 구하기	30%
	카드에 적혀 있는 수가 3일 때 확률 구하기	30%
답 구하기	확률의 덧셈정리를 이용하여 확률 구하기	10%

16

목표 | 확률의 덧셈정리와 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $\frac{1}{3}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{4}}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

한편 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$\mathrm{P}(A\cap B)$의 값 구하기	20%
	$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$의 값 구하기	50%
답 구하기	$\mathrm{P}(A^C|B^C)$의 값 구하기	30%

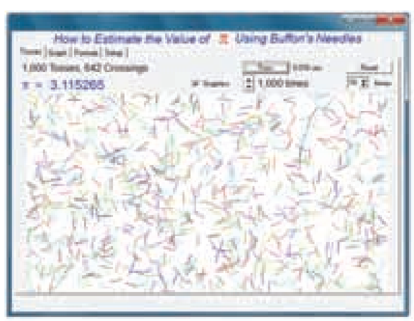
M+ Engineering

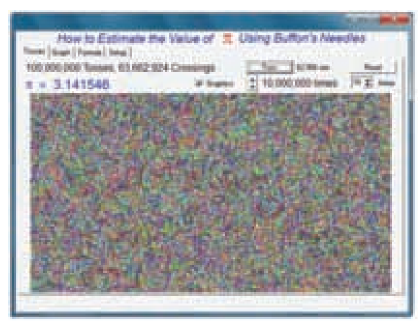
수 학 + 공 학

통계적 확률을 이용한 원주율 계산

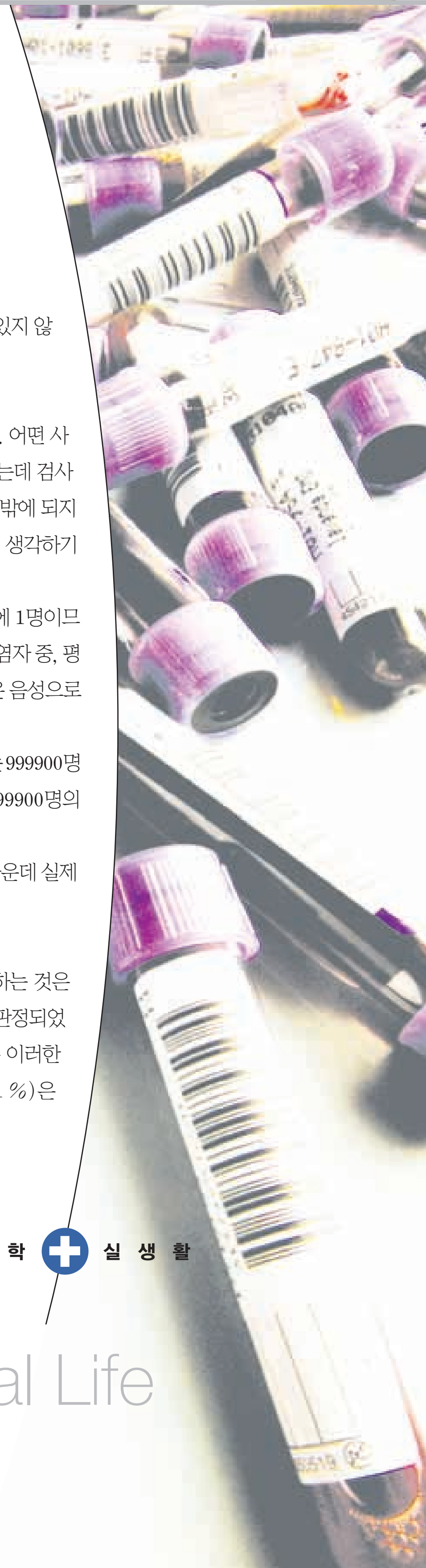
18세기 프랑스의 수학자 뷔퐁(Buffon ; 1707~1788)은 일정한 간격의 평행선이 그어져 있는 바닥에 길이가 일정한 바늘을 떨어뜨렸을 때 바늘이 평행선에 닿을 확률을 구하는 문제를 제시하였다. 이를 '뷔퐁의 바늘 문제'라고 하는데, 뷔퐁은 평행선 사이의 간격이 1이고 바늘의 길이가 1이면 바늘이 평행선에 닿을 확률은 $\frac{2}{\pi}$가 된다는 사실을 이용하여 원주율의 값을 확률적으로 구하고자 하였다.

다음은 수학과 관련된 프로그램 등을 소개하는 웹사이트 http://www.efg2.com/Lab에서 뷔퐁의 바늘 문제를 시뮬레이션 할 수 있는 프로그램을 내려받아 바늘을 던지는 시행을 반복 수행하여 바늘이 평행선에 닿을 확률을 구하고, 이를 이용하여 원주율과 참값과의 오차를 구한 것이다.





시행 횟수	바늘이 평행선에 닿은 횟수	원주율	오차(%)
10	5	4.000000	27.324
10^2	58	3.448276	9.762
10^3	642	3.115265	0.838
10^4	6360	3.144654	0.097
10^5	63674	3.140999	0.019
10^6	637254	3.138466	0.100
10^7	6366521	3.141433	0.005
10^8	63662924	3.141546	0.001



정밀도 99 %의 검사에서 '양성'의 의미

조건부확률은 일상생활에서 자주 등장하며, 확률에 대한 정확한 지식을 가지고 있지 않으면 착각하기 쉽다. 예컨대 다음과 같은 사례가 있다.

치사율이 높은 신형 바이러스가 발생해, 이미 만 명 중 1명이 감염되었다고 하자. 어떤 사람이 이 바이러스에 감염되었는지 확인하기 위하여 정밀도가 99 %인 검사를 받았는데 검사 결과가 감염되어 있음을 뜻하는 양성이었다. 이때 오진 판정이 나올 가능성이 1 % 밖에 되지 않는 검사에서 양성 판정을 받았으므로 바이러스에 감염된 것이 거의 확실하다고 생각하기 쉽다. 하지만 확률을 통해 생각하여 보면 그렇지만은 않다.

예를 들어 100만 명이 이 검사를 받았다고 하자. 바이러스의 감염률은 만 명 중에 1명이므로, 100만 명 중에는 100명의 감염자가 있다. 정밀도 99 %의 검사는 이 100명의 감염자 중, 평균적으로 99명을 올바르게 양성으로 판정할 것이다. 그러나 감염자 중 나머지 1명은 음성으로 잘못 판정할 것이다. 즉 '가짜 음성'이다.

한편 100만 명의 대부분을 차지하는 999900명은 비감염자다. 정밀도 99 %의 검사는 999900명의 99 %에 해당하는 98만 9901명을 올바르게 음성으로 판정할 것이다. 그러나 999900명의 1 %에 해당하는 9999명은 양성으로 잘못 판정할 것이다. 즉 '가짜 양성'이다.

결국 양성으로 판정된 사람의 합계는 $99+9999=10098$(명)이 된다. 그러나 그 가운데 실제로 감염된 사람은 99명 뿐이다. 이는 양성으로 판정된 사람의 1 %에 지나지 않는다.

따라서 이 검사에서 양성 판정을 받았다고 해도, 실제로 감염되어 있음을 의미하는 것은 아니다. 검사를 받기 전에는 0.01 %(만 명 중 1명)였던 확률이, 검사에서 양성으로 판정되었다는 것에 의해 1 %(100명 중 1명)로 증가한 것뿐이다. 재검사가 필요하다는 것은 이러한 사정이 있기 때문이다. 또 음성 판정을 받았다고 해도, 98만 9902명 중 1명(0.0001 %)은 실제로는 감염되어 있는 셈이다.

수 학 ✚ 실 생 활

M+ Real Life

공장에서 생산하는 자동차 중 결함이 있는 자동차의 수는
통계를 이용하여 예측할 수 있다.

통계

| 준 | 비 | 학 | 습 |

확률과 통계 수학적 확률

1 빨간 공 4개와 파란 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 빨간 공 1개와 파란 공 2개를 꺼낼 확률 $\frac{12}{35}$

(2) 꺼낸 공의 색깔이 모두 같을 확률 $\frac{1}{7}$

중 ③ 대푯값과 산포도

2 지민이가 친구 5명의 한 달 용돈을 조사하였더니 다음과 같았다. 한 달 용돈의 평균과 표준편차를 각각 구하여라. 평균: 32000원, 표준편차: $1000\sqrt{26}$원

한 달 용돈 (단위: 천 원)

30, 25, 30, 40, 35

단원의 지도 목표

1. 확률분포

① 확률변수와 확률분포의 뜻을 알게 한다.
② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있게 한다.
③ 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.
④ 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.

2. 통계적 추정

① 모집단과 표본의 뜻을 알고, 표본평균과 모평균의 관계를 이해하게 한다.
② 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다.
③ 표본비율과 모비율의 관계를 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 모집단과 표본은 실제적인 예를 통하여 이해하게 한다.
② 모평균 추정은 모집단의 분포가 정규분포인 경우만 다루고, 모비율 추정은 표본의 크기가 큰 경우만 다룬다.
③ 확률분포와 통계적 추정을 다룰 때에는 공학적 도구를 활용하여 실생활 자료를 처리해 보게 할 수 있다.
④ 미적분 Ⅰ을 이수한 학생들에게는 연속확률변수와 관련된 내용을 적분을 이용하여 설명할 수도 있다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습

[중1~3학년군]
대푯값과 산포도

[확률과 통계]
순열과 조합
확률의 뜻과 활용
조건부확률

본 단원

1. 확률분포
확률변수와 확률분포
이항분포
정규분포

2. 통계적 추정
모집단과 표본
모평균의 추정
모비율의 추정

단원의 차시별 지도 계획

<table>
<tr><th>중단원</th><th>소단원</th><th>차시</th><th>교과서(쪽)</th><th>지도 내용</th><th>용어와 기호</th></tr>
<tr><td colspan="2">단원의 개관</td><td rowspan="3">1~7</td><td>100~101</td><td>• 단원의 개관
• 준비 학습</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">1. 확률분포</td><td>중단원 도입</td><td>102</td><td>• 야구 선수와 타율</td><td></td></tr>
<tr><td>01 확률변수와 확률분포</td><td>103~112</td><td>• 확률변수와 확률분포
• 이산확률변수의 기댓값과 표준편차
• 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차</td><td>확률변수
이산확률변수
확률질량함수
확률분포
기댓값
$\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$
$\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$</td></tr>
<tr><td>02 이항분포</td><td>8~12</td><td>113~118</td><td>• 이항분포
• 이항분포의 평균과 표준편차
• 큰 수의 법칙</td><td>이항분포
큰 수의 법칙
$\mathrm{B}(n, p)$</td></tr>
<tr><td>03 정규분포</td><td>13~21</td><td>119~130</td><td>• 연속확률변수
• 정규분포
• 표준정규분포
• 이항분포와 정규분포의 관계</td><td>연속확률변수
확률밀도함수
정규분포
표준화
표준정규분포
$\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0, 1)$</td></tr>
<tr><td>수준별 학습</td><td>22</td><td>131~133</td><td>• 중단원 확인 학습 문제</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">2. 통계적 추정</td><td>중단원 도입</td><td rowspan="2">23~27</td><td>134</td><td>• 저수지에 살고 있는 붕어의 수는 모두 몇 마리일까?</td><td></td></tr>
<tr><td>01 모집단과 표본</td><td>135~140</td><td>• 모집단과 표본
• 모평균과 표본평균의 관계</td><td>모집단, 표본
전수조사, 표본조사
임의추출, 모평균
모분산, 모표준편차
표본평균, 표본분산
표본표준편차
$\overline{X}$, S^2, S</td></tr>
<tr><td>02 모평균의 추정</td><td>28~29</td><td>141~143</td><td>• 모평균의 추정</td><td>추정
신뢰도
신뢰구간</td></tr>
<tr><td>03 모비율의 추정</td><td>30~32</td><td>144~148</td><td>• 모비율과 표본비율의 관계
• 모비율의 추정</td><td>모비율
표본비율
$\hat{p}$</td></tr>
<tr><td>수준별 학습</td><td>33</td><td>149~151</td><td>• 중단원 확인 학습 문제</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">단원 마무리</td><td>34~35</td><td>152~159</td><td>• 수행 과제
• 대단원 학습 내용 정리
• 대단원 평가 문제
• 수학 플러스</td><td></td></tr>
</table>

단원의 이론적 배경

1. 통계학의 발달

통계학은 17세기에 독일, 영국, 프랑스에서 정치, 경제, 토지, 인구 등 국가적 상황을 계통적으로 기술하고, 사회 현상의 인과 관계를 규명하고자 생겨났다.

17세기에서 18세기에 걸쳐 파스칼(Pascal, B.; 1623~1662), 페르마(Fermat, P.; 1601~1665), 베르누이(Bernoulli, J.; 1654~1705), 라플라스(Laplace, P. S.; 1749~1827) 등에 의하여 확률론이 수립되어 우연 현상을 수학적으로 관찰, 처리하는 방법이 개발되었다. 그러나 확률론에 입각하여 통계학을 과학적으로 체계화한 학자는 벨기에의 케틀레(Quételet, L. A. J.; 1796~1874)이다.

통계학은 통계 자료의 수집, 그 자료의 분석 그리고 그들로부터 어떤 추론을 하는 방법에 대한 이론과 응용에 관련된 것이며, 그 이용 목적에 따라 기술통계학과 추측통계학으로 나뉘어진다. 기술통계학은 단순히 수집된 자료를 분석하여 현상을 수리적으로 요약 설명하는 데 목적을 두고 있으며, 19세기 말 영국의 피어슨(Pearson, K.; 1857~1936)에 의하여 확립되었다. 추측통계학은 수집된 자료의 분석에 그치는 것이 아니라, 분석된 자료를 근거로 추론을 하는 것으로 20세기에 들어서면서 생겨났다.

아일랜드의 고셋(Gosset, W. S.; 1876~1931)이 T분포를 발견, 발표하여 소표본에 의한 추정과 검정을 하는 연구에서 추측통계학의 실마리를 만들고, 영국의 통계학자 피셔(Fischer, R. A.; 1890~1962)가 추측통계학의 이론적 체계를 확립하고, 분산분석법, 실험계획법 등을 창시하였다. 추측통계학은 대량 생산의 산업의학과 생물학, 경제, 정치, 심리학, 여론조사와 기타 사회과학, 농업, 교통 연구, 기상학, 물리학 그리고 기계공학에서 그 중요성이 증가되고 있다.

2. 확률분포

어떤 확률 실험에서 발생하는 사건에 대응하는 확률을 도표로 나타낸 것을 확률분포라고 한다. 확률분포에는 크게 이산확률분포와 연속확률분포가 있다. 이산확률분포는 이산확률변수에 의해 결정되는 확률분포이며, 연속확률분포는 연속확률변수에 의해 결정되는 확률분포이다.

확률변수란 표본공간의 각 원소에 하나의 수를 대응시킨 것이다. 즉, 표본공간을 $S=\{e_1, e_1, \cdots, e^n, \cdots\}$이라 하고, 확률변수를 X라고 하면 X는 표본공간을 정의역으로 하고 실수의 집합 R를 공역으로 하는 함수

$$X: S \to R,\ X(e_i)=x_i,\ x_i \in R$$

이다. 이때 함숫값 x_i의 개수를 셀 수 있으면 그 확률변수를 이산확률변수라 하고, 셀 수 없으면 연속확률변수라고 한다.

일반적으로 확률변수는 알파벳의 대문자 X, Y, Z, …으로 나타내고, 확률변수의 함숫값은 소문자 x, y, z, … 또는 숫자로 나타낸다. 편의상 $X(e_i)=x_i$를 간단히 $X=x_i$로 나타내고, 그 확률을 $\mathrm{P}(X=x_i)$와 같이 나타낸다.

이산확률변수 X가 취하는 값은 무한일 수도 있으나 고등학교 교육과정에서는 유한인 경우로 한정하여 다룬다.

이산확률변수 X가 취하는 모든 값 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여 각각의 확률 $\mathrm{P}(X=x_i)$를 대응시킨 것을 확률분포라 하고, $\mathrm{P}(X=x_i)$를 확률질량함수 또는 이산확률밀도함수라고 한다. 즉, 확률질량함수는 확률분포를 하나의 식으로 나타낸 것이다.

확률질량함수는 다음의 두 성질을 만족한다.

(i) $\mathrm{P}(X=x_i) \geq 0$ (단, $i=1, 2, \cdots, n$)

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i)=1$

임의의 실수 a, $b(a<b)$에 대하여 X가 연속인 실변수 확률변수일 때, $a\le X\le b$가 될 확률이 실직선 위에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 존재하여 적분 $\mathrm{P}(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$로 주어질 때 X를 연속확률변수라 하고, 함수 $f(x)$를 확률밀도함수라고 한다. 이때 다음과 같은 성질을 갖는다.

모든 x에 대하여

$$f(x)\ge 0,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$

연속확률변수의 엄밀한 정의는 다음과 같다.

어떤 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

를 만족하는 함수 $f(x)$가 존재할 때, X를 연속확률변수라 하고, $f(x)$를 확률밀도함수라고 한다.

일반적으로 확률변수 X에 대하여 그 평균과 분산은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$(1)\ \mathrm{E}(X)=\begin{cases}\text{이산인 경우: } \sum_i x_i \mathrm{P}(X=x_i)\\ \text{연속인 경우: } \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\end{cases}$$

$$(2)\ \mathrm{V}(X)=\begin{cases}\text{이산인 경우: } \sum_i \{x_i-\mathrm{E}(X)\}^2 \mathrm{P}(X=x_i)\\ \text{연속인 경우: } \int_{-\infty}^{\infty} \{x-\mathrm{E}(X)\}^2 f(x)dx\end{cases}$$

3. 통계적 추측

모평균의 신뢰구간은 정규분포를 모집단의 분포로 가정하고, 이때 표본평균의 성질로부터 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다는 사실에 대해 그 유도 과정을 설명한다.

중심극한정리와 표본분산 s^2의 일치성으로부터 n이 충분히 크면 s^2은 σ^2에 가까워지므로 다음과 같은 결과를 얻는다.

'n이 충분히 크면 $\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$은 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.'

따라서 모분산 σ^2이 미지인 경우에는 신뢰구간의 공식에서 σ 대신 s를 사용하여 근사적인 신뢰구간을 얻을 수 있다. 일반적으로 $n\ge 25$이면 이와 같은 근사적인 신뢰구간을 사용해도 됨이 알려져 있다.

X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $\overline{p}=\dfrac{X}{p}$라고 하면 충분히 큰 수 n에 대하여 $\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 일반적으로 $np\ge 5$, $nq\ge 5$이면 이와 같은 근사적인 신뢰구간을 사용해도 됨이 알려져 있다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

<table>
<tr><td colspan="2">대단원</td><td>Ⅲ. 통계</td><td>쪽수</td><td>교과서 100~104쪽</td></tr>
<tr><td colspan="2">소단원</td><td>1. 확률분포 01 확률변수와 확률분포</td><td>차시</td><td>1/35</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td colspan="3">확률변수의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>학습 과정</td><td colspan="2">교수 · 학습 활동</td><td>교수 · 학습상의 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>선수 학습 확인

동기 유발

학습 목표 제시</td><td colspan="2">준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다.
Ⅱ단원 1차시에서 다루었던 표본공간의 뜻에 대하여 간단히 확인, 점검한다.
중단원 도입 글을 읽고 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다.
이번 차시의 학습 목표를 제시한다.
• 확률변수의 뜻을 안다.</td><td>모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.</td></tr>
<tr><td>전개</td><td>탐구 활동

개념 학습</td><td colspan="2">생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다.
탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다.
학습 내용 설명
확률변수
어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수 값을 대응시키는 것을 확률변수라고 한다.
이산확률변수
확률변수 X가 가지는 값이 유한개이거나 자연수와 같이 셀 수 있는 값에 대응될 때, X를 이산확률변수라고 한다.
이때 확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로
$$\mathrm{P}(X=x)$$
와 같이 나타낸다.</td><td>이산확률변수의 뜻을 구체적인 예를 통하여 이해하게 한다.</td></tr>
<tr><td>정리</td><td>학습 내용 정리
차시 예고</td><td colspan="2">본시의 학습 내용을 정리한다.
다음 차시를 예고한다.
• 확률분포의 뜻에 대하여 알아본다.</td><td></td></tr>
</table>

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

<table>
<tr><td colspan="2">대단원</td><td>Ⅲ. 통계</td><td>쪽수</td><td>교과서 104~106쪽</td></tr>
<tr><td colspan="2">소단원</td><td>1. 확률분포 01 확률변수와 확률분포</td><td>차시</td><td>2/35</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td colspan="3">확률분포의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>학습 과정</td><td colspan="2">교수 · 학습 활동</td><td>교수 · 학습상의 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>선수 학습 확인
학습 목표 제시</td><td colspan="2">◎ 이전 차시에서 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다.
◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다.
• 확률분포의 뜻을 안다.</td><td></td></tr>
<tr><td>전개</td><td>개념 학습

문제 해결</td><td colspan="2">◎ 학습 내용 설명
확률분포와 확률질량함수
이산확률변수 X가 가지는 값이 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이고 X가 이들 값을 가질 확률이 각각 p_1, p_2, $\cdots$, p_n일 때, x_1, x_2, $\cdots$, x_n과 p_1, p_2, $\cdots$, p_n 사이의 대응 관계를 이산확률변수 X의 확률분포라고 한다.
또 이 대응 관계를 나타내는 함수
$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$
를 이산확률변수 X의 확률질량함수라고 한다.
확률질량함수의 성질
이산확률변수 X의 확률질량함수가
$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$
일 때, 다음이 성립한다.
(1) $0\le \mathrm{P}(X=x_i)\le 1$
(2) $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)=1$
(3) $\mathrm{P}(x_i\le X\le x_j)=\sum_{k=i}^{j}\mathrm{P}(X=x_k)$(단, $i\le j$)
◎ 예제 01을 설명한다.
◎ 문제 1번을 풀게 한다.
정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.</td><td>확률분포와 확률질량함수의 뜻을 명확히 구분할 수 있도록 지도한다.</td></tr>
<tr><td>정리</td><td>학습 내용 정리
차시 예고</td><td colspan="2">◎ 본시의 학습 내용을 정리한다.
◎ 다음 차시를 예고한다.
• 이산확률변수의 기댓값의 뜻과 이를 구하는 방법을 알아본다.</td><td></td></tr>
</table>

1 확률분포

중단원을 시작하며

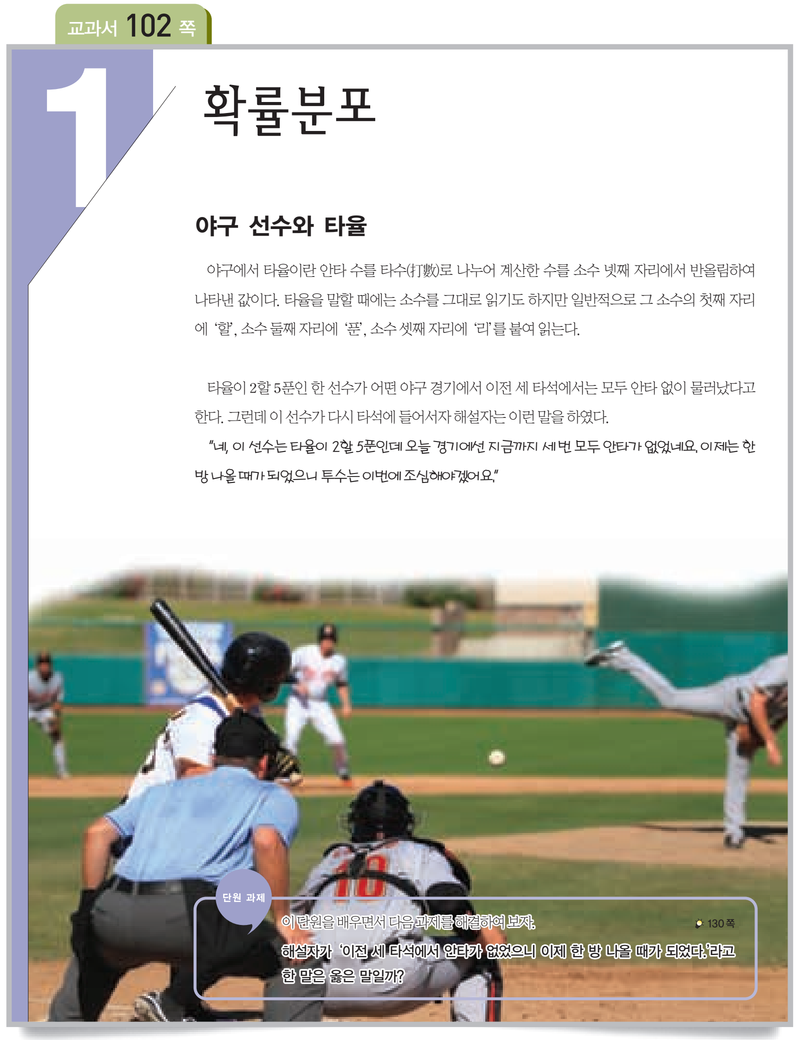
이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 확률변수와 확률분포의 뜻을 알게 한다.
② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있게 한다.
③ 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.
④ 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 확률변수와 확률분포	확률변수와 확률분포
	이산확률변수의 기댓값과 표준편차
	확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차
02 이항분포	이항분포
	이항분포의 평균과 표준편차
	큰 수의 법칙
03 정규분포	연속확률변수
	정규분포
	표준정규분포
	이항분포와 정규분포의 관계
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 102 쪽


1 확률분포

야구 선수와 타율

야구에서 타율이란 안타 수를 타수(打數)로 나누어 계산한 수를 소수 넷째 자리에서 반올림하여 나타낸 값이다. 타율을 말할 때에는 소수를 그대로 읽기도 하지만 일반적으로 그 소수의 첫째 자리에 '할', 소수 둘째 자리에 '푼', 소수 셋째 자리에 '리'를 붙여 읽는다.

타율이 2할 5푼인 한 선수가 어떤 야구 경기에서 이전 세 타석에서는 모두 안타 없이 물러났다고 한다. 그런데 이 선수가 다시 타석에 들어서자 해설자는 이런 말을 하였다.

"네, 이 선수는 타율이 2할 5푼인데 오늘 경기에선 지금까지 세 번 모두 안타가 없었네요. 이제는 한 방 나올 때가 되었으니 투수는 이번에 조심해야겠어요."

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 130 쪽

해설자가 '이전 세 타석에서 안타가 없었으니 이제 한 방 나올 때가 되었다.'라고 한 말은 옳은 말일까?

들어가면서 현대는 많은 자료들이 넘쳐난다. 이 자료들을 정리하여 의미있는 결과를 만드는 것이 통계의 역할이라 할 수 있다. 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우를 생각하고, 이 경우들에서 관심의 대상이 되는 주제를 선정하여 그 각각이 일어날 확률을 대응시키는 관계를 확률분포라고 한다. 이때 관심을 갖는 주제에 대한 결과가 이산적인 양으로 유한개로 이루어질 수도 있고 연속적인 양으로 구간으로 표시될 수도 있다.

이 단원에서는 확률변수의 평균과 표준편차, 확률분포들 중 실제적으로 자주 나타나는 확률분포인 이항분포를 학습하게 된다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.	상	이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있다.
	중	확률분포를 쉽게 알 수 있는 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있다.
	하	확률분포가 주어진 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있다.
2. 이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있다.	상	이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있다.
	중	간단한 이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있다.
	하	확률분포표가 주어진 이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있다.
3. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.	상	어떤 확률변수가 이항분포를 따르는지 판단하고 이항분포를 따르는 여러 가지 확률변수의 확률, 평균, 표준편차를 구할 수 있다.
	중	이항분포의 뜻을 알고 평균과 표준편차를 구할 수 있다.

교과서 103 쪽

01 확률변수와 확률분포

- 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
- 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

확률변수와 확률분포란 무엇인가?

생각 열기

카르다노

산술, 천문학, 물리학, 의학 등 여러 분야에서 많은 저작을 남긴 카르다노(Cardano, G. ; 1501～1576)는 “위대한 술법”이라는 책에서 방정식의 음수인 근을 다루기도 하였고, 허수와 관련한 계산에도 관심을 보인 수학자였다. 또 상습 도박꾼이기도 하였던 그는 “도박사를 위한 짤막한 안내문”이라는 확률에 대한 책에 ‘두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 합에 내기를 건다고 하면 합이 7이 되는 경우가 가장 유리하다.’는 말을 남겼다.

탐구 활동

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 합을 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 주사위 A, B의 눈의 수에 따라 X가 어떤 값을 가지는지 다음 표를 완성하여 보자.

B \ A	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. 카르다노가 ‘두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 합에 내기를 건다고 하면 합이 7이 되는 경우가 가장 유리하다.’라고 한 이유를 말하여 보자.

P. 63 표본공간은 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합이다.

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면 표본공간 S는 다음과 같다.

$$S=\{\mathrm{HH, HT, TH, TT}\}$$

성취 기준	성취 수준	
	하	시행 횟수와 확률이 주어진 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.
4. 정규분포의 뜻을 알고, 정규분포를 나타내는 곡선의 성질을 이해한다.	상	정규분포의 뜻을 알고 정규분포의 확률밀도함수를 이용하여 정규분포를 나타내는 곡선의 성질을 파악하고 설명할 수 있다.
	중	정규분포의 뜻을 알고 정규분포를 나타내는 곡선의 성질을 말할 수 있다.
	하	정규분포의 뜻을 말할 수 있다.
5. 표준정규분포와 표준화의 뜻을 알고, 표준정규분포를 활용하여 정규분포의 확률을 구할 수 있다.	상	표준화의 필요성과 그 과정을 이해하고, 표준정규분포를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	표준정규분포를 활용하여 평균과 표준편차가 제시되어 있고 표준화 과정이 간단한 정규분포의 확률을 구할 수 있다.
	하	표준정규분포와 표준화의 뜻을 말할 수 있다.

01 확률변수와 확률분포

소단원 지도 목표

① 확률변수와 확률분포의 뜻을 알게 한다.
② 이산확률변수의 뜻을 알게 한다.
③ 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있게 한다.
④ 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 도수분포표에서 상대도수를 이용하여 평균을 구하는 것으로부터 이산확률변수의 기댓값을 구하는 과정을 이해시킨다.

2. 확률변수의 기댓값과 평균이 같은 의미임을 알게 한다.

3. 확률변수 X와 $Y=aX+b$의 기댓값과 표준편차 사이의 관계를 표준화에 이용할 수 있도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

• 확률변수(確率變數, random variable)
• 이산확률변수(離散確率變數, discrete random variable)
• 확률질량함수(確率質量函數, probability mass function)
• 확률분포(確率分布, probability distribution)
• 기댓값(expected value)
• $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$

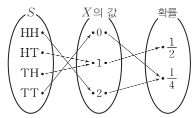
생각 열기 참/고/자/료

카르다노는 재능있고 다양한 소질을 가지고 있었던 수학자로서 산술, 천문학, 물리학, 의학 등과 다른 분야에 대한 총 7000여 쪽의 저작을 하였으며, 특히 가장 뛰어난 업적은 “위대한 술법, Ars Magna”인데, 이 책은 대수학만을 다룬 최초의 라틴 문헌으로 유명하다. 이 책에는 방정식의 유리수 근에 대한 글도 있고, 허수의 계산에 관한 내용도 있으며, 다항방정식의 실수 근에 대한 근삿값을 찾는 과정과 ‘데카르트의 부호 법칙’에 대한 내용도 있다. 카르다노는 상습적인 도박꾼으로서 도박꾼의 교법을 쓰기도 했는데, 그 책에는 주사위 문제와 같이 확률에 관한 흥미있는 문제들도 있다고 한다.

교과서 104 쪽

이 시행에서 두 개의 동전에 대하여 앞면이 나온 횟수를 X라고 하면, 집합 S의 각 원소 HH, HT, TH, TT에 대응하는 X의 값은 각각 2, 1, 1, 0이다.

이때 X는 0, 1, 2 중에서 하나의 값을 가지는 변수이고, 변수 X가 각 값을 가질 확률을 표로 나타내면 다음과 같다.



X	0	1	2	합계
확률	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

확률변수는 표본공간을 정의역으로, 실수의 집합을 공역으로 하는 함수이지만 변수의 역할도 하기 때문에 확률변수라고 한다.

확률변수는 보통 알파벳 대문자 X, Y, Z, …로 나타내고, 확률변수가 가지는 값은 알파벳 소문자 x, y, z, …로 나타낸다.

이와 같이 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수 값을 대응시키는 것을 **확률변수**라고 한다.

특히 확률변수 X가 가지는 값이 유한개이거나 자연수와 같이 셀 수 있는 값에 대응될 때, X를 **이산확률변수**라고 한다.

이때 확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로

$$\mathrm{P}(X=x)$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어 위의 확률변수 X는 이산확률변수이고

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$$

이다.

이산확률변수 X가 가지는 값이 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이고 X가 이들 값을 가질 확률이 각각 $p_1, p_2, \cdots, p_n$일 때, $x_1, x_2, \cdots, x_n$과 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 사이의 대응 관계를 이산확률변수 X의 **확률분포**라고 한다.

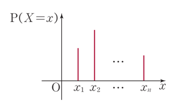
또 이 대응 관계를 나타내는 함수

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

를 이산확률변수 X의 **확률질량함수**라고 한다.

한편 이산확률변수 X의 확률분포를 다음과 같이 표와 그래프로 나타낼 수 있다.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1



교과서 105 쪽

일반적으로 확률질량함수는 다음과 같은 성질을 가진다.

❶ **확률질량함수의 성질**

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

일 때, 다음이 성립한다.

(1) $0\le \mathrm{P}(X=x_i)\le 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)=1$

(3) $\mathrm{P}(x_i\le X\le x_j)=\sum_{k=i}^{j}\mathrm{P}(X=x_k)$ (단, $i\le j$)

확률변수 X가 a 이상 b 이하의 값을 가질 확률은 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$로 나타낸다.

예제 01 흰 공 4개와 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내려고 한다. 주머니에서 나오는 흰 공의 개수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률질량함수를 구하여라.

(2) X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(3) 흰 공이 2개 이상 나올 확률을 구하여라.

풀이 (1) 이산확률변수 X의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_5\mathrm{C}_{3-x}}{{}_9\mathrm{C}_3}\ (x=0, 1, 2, 3)$$

(2) X의 각 값에 대한 확률은

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_0}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$$

이고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$	1

(3) 흰 공이 2개 이상 나올 확률은 $\mathrm{P}(X\ge 2)$이므로

$$\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{5}{14}+\frac{1}{21}=\frac{17}{42}$$

답 (1) $\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_5\mathrm{C}_{3-x}}{{}_9\mathrm{C}_3}\ (x=0, 1, 2, 3)$ (2) 풀이 참조 (3) $\frac{17}{42}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 개의 주사위의 눈의 수의 합을 모두 구해 보고 각각의 값을 가질 확률을 생각해 봄으로써 확률변수의 뜻을 알게 하려는 것이다.

1.

B \ A	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. 7이 나올 확률이 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$로 가장 크므로 가장 유리하다.

본문 해설

❶ 확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ (단, $i=1, 2, \cdots, n$)

일 때, 모든 i에 대하여 p_i는 0 이상이고 1 이하이다.

또 $p_1+p_2+\cdots+p_n=\sum_{i=1}^{n}p_i=1$, 즉 확률분포에서 각 확률의 합은 항상 1이다.

지/도/자/료

중학교 때 배운 도수분포와 이 단원에서 배우는 확률분포를 연결지어 학생들의 이해를 돕는다.

도수분포	⟷	확률분포
계급값	⟷	확률변수
상대도수	⟷	확률
상대도수의 분포표	⟷	확률분포표

문제 1 남학생 4명, 여학생 3명으로 구성된 어느 고등학교의 방송부에서 새로 제작한 동영상을 편집할 2명을 제비뽑기로 정한다고 한다. 뽑힌 학생 중에서 여학생의 수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률질량함수를 구하여라.

(2) X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(3) 여학생이 1명 이하로 뽑힐 확률을 구하여라.

이산확률변수의 기댓값과 표준편차는 어떻게 구하는가?

탐구 활동

제비는 4~7월경에 알을 낳는데 새끼는 보통 부화한 지 3주 정도 지나면 둥지를 떠난다. 다음 표는 부화한 제비 100마리에 대하여 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수를 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

날의 수(일)	20	21	22	23	합계
제비의 수(마리)	10	20	40	30	100

1. 부화한 제비 한 마리가 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수의 평균을 구하여 보자.

2. 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수를 X라고 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어 보자.

탐구 활동에서 부화한 제비 한 마리가 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수의 평균은 다음과 같다.

$$\frac{20\times10+21\times20+22\times40+23\times30}{100}=21.9(\text{일}) \qquad \cdots\cdots ①$$

한편 부화한 제비 한 마리가 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수를 X라고 하면 확률변수 X가 가지는 값은 20, 21, 22, 23이고, X의 각 값에 대한 확률은

$$\mathrm{P}(X=20)=\frac{10}{100},\ \mathrm{P}(X=21)=\frac{20}{100},$$

$$\mathrm{P}(X=22)=\frac{40}{100},\ \mathrm{P}(X=23)=\frac{30}{100}$$

이므로 ①의 좌변은 X의 각 값과 그 값에 대응하는 확률을 곱하여 더한 것과 같다. 즉,

$$20\times\frac{10}{100}+21\times\frac{20}{100}+22\times\frac{40}{100}+23\times\frac{30}{100}=21.9(\text{일})$$

이다.

(3) $\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\dfrac{2}{7}+\dfrac{4}{7}$

$=\boldsymbol{\dfrac{6}{7}}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 도수분포표를 보고 부화한 제비 한 마리가 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수의 평균을 구해 보는 활동을 통해 확률변수의 평균을 이해하게 하려는 것이다.

1. (평균)

$=\dfrac{20\times10+21\times20+22\times40+23\times30}{100}$

$=21.9(\text{일})$

2.

X	20	21	22	23	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

1

목표| 이산확률변수의 확률질량함수를 구하고, 이를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고, X의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{2-x}}{{}_7\mathrm{C}_2}\ (x=0,\ 1,\ 2)}$$

(2) X의 각 값에 대한 확률은

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$$

이고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

2

목표| 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있게 한다.

풀이| X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

따라서 구하는 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는

$\mathrm{E}(X)$

$=2\times\dfrac{1}{36}+3\times\dfrac{1}{18}+4\times\dfrac{1}{12}+5\times\dfrac{1}{9}+6\times\dfrac{5}{36}+7\times\dfrac{1}{6}$

$\quad+8\times\dfrac{5}{36}+9\times\dfrac{1}{9}+10\times\dfrac{1}{12}+11\times\dfrac{1}{18}+12\times\dfrac{1}{36}$

$=\boldsymbol{7}$

교과서 107 쪽

일반적으로 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다고 하자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

이때

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

를 확률변수 X의 **기댓값** 또는 평균이라 하고, 기호로

$$\mathbf{E}(X)$$

와 같이 나타낸다.

$\mathrm{E}(X)$에서 E는 Expectation(기댓값)의 첫 글자이다. 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는 mean(평균)의 첫 글자 m으로 나타내기도 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이산확률변수의 기댓값(평균)

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$일 때, X의 기댓값(평균) $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

예제 02 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나온 동전의 개수를 확률변수 X라고 할 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구하여라.

풀이 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 구하는 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$$

답 1

문제 2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수의 합을 확률변수 X라고 할 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구하여라.

교과서 108 쪽

중학교에서는 도수분포에서 변량이 평균을 중심으로 흩어져 있는 정도를 나타내는 산포도로서 분산과 표준편차를 생각하였다. 마찬가지로 확률분포에서도 확률변수의 분산과 표준편차를 생각할 수 있다.

❶ 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 m이라고 하자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

이때 편차 $X-m$의 제곱의 평균, 즉

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((X-m)^2)&=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\end{aligned}$$

를 이산확률변수 X의 분산이라 하고, 기호로

$$\mathbf{V}(X)$$

와 같이 나타낸다.

또 분산 $\mathrm{V}(X)$의 양의 제곱근 $\sqrt{\mathrm{V}(X)}$를 이산확률변수 X의 표준편차라 하고, 기호로

$$\boldsymbol{\sigma}(X)$$

와 같이 나타낸다.

$\mathrm{V}(X)$에서 V는 Variance(분산)의 첫 글자이다.

$\sigma(X)$에서 σ(sigma)는 standard deviation(표준편차)의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자이다.

예제 03 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

풀이 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\left(1-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(2-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(4-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}=1$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

답 $\mathrm{V}(X)=1,\ \sigma(X)=1$

본문 해설

❶ 이산확률변수의 평균과 표준편차는 상대도수분포표에서 평균, 표준편차와 같은 방법으로 구할 수 있다. 도수분포표가 다음과 같을 때

계급값(x_i)	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
도수(f_i)	f_1	f_2	f_3	$\cdots$	f_n	N

평균 m은 $m=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_if_i$

이다. 이때 상대도수 $\dfrac{f_i}{N}$는 x_i가 일어날 확률이므로

$\dfrac{f_i}{N}=p_i$로 놓으면

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

이다. 따라서 평균 m은

$$m=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_if_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{f_i}{N}=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

또 분산 σ^2은

$$\begin{aligned}\sigma^2&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2f_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\frac{f_i}{N}\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\end{aligned}$$

지/도/자/료

교과서에서는 X가 가지는 값이 유한집합인 것만을 이산확률변수로 취급하였으나, X가 가지는 값이 가산집합(자연수 전체의 집합과 일대일 대응이 되는 집합)인 경우에도 이산확률변수이다.

예를 들어 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 처음 나올 때까지 던진 횟수를 확률변수 X라고 하면 X가 가지는 값은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$와 같이 자연수 전체의 집합과 같아진다.

문제 3 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

문제 4 1에서 4까지의 숫자가 각각 적힌 4장의 카드가 들어 있는 주머니에서 2장의 카드를 동시에 꺼내려고 한다. 꺼낸 카드에 적힌 수의 합을 확률변수 X라고 할 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

❶ 확률변수 X의 평균이 m일 때, X의 분산은 다음을 이용하여 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2mx_i+m^2)p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m^2+m^2\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2\\&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

이상을 정리하면 다음과 같다.

이산확률변수의 분산과 표준편차

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$이고, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 m이라고 할 때,

(1) 분산 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$
$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(2) 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

4

목표| 확률변수 X의 확률분포를 구하고, 이를 이용하여 X의 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)$
$=3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{6}+7\times\frac{1}{6}$
$=5$

$\mathrm{V}(X)$
$=(3-5)^2\times\frac{1}{6}+(4-5)^2\times\frac{1}{6}+(5-5)^2\times\frac{1}{3}$
$+(6-5)^2\times\frac{1}{6}+(7-5)^2\times\frac{1}{6}$
$=\mathbf{\frac{5}{3}}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{3}}$

3

목표| 이산확률변수의 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{4}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{1}{10}$
$=1$

$\mathrm{V}(X)$
$=(0-1)^2\times\frac{4}{10}+(1-1)^2\times\frac{3}{10}+(2-1)^2\times\frac{2}{10}$
$+(3-1)^2\times\frac{1}{10}$
$=\mathbf{1}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\mathbf{1}$

본문 해설

❶ 분산은 정의에 따라 $\mathrm{E}((X-m)^2)$으로 구할 수도 있으나 기댓값 m이 분수꼴로 나타나는 경우 $(X-m)^2$을 계산하기가 번거롭다. 이와 같은 경우
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
을 이용하면 계산이 좀 더 간편해진다.

5

목표| $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$을 이용하여 확률변수 X의 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{3}{6}=\frac{7}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{2}{6}+3^2\times\frac{3}{6}=6$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=6-\frac{49}{9}=\mathbf{\frac{5}{9}}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{3}}$

예제 04 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

풀이 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{2}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{2}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

문제 5 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

문제 6 3개의 불량품이 섞여 있는 5개의 제품 중에서 임의로 2개의 제품을 고르려고 한다. 고른 제품 중에서 불량품의 개수를 확률변수 X라고 할 때, X의 표준편차를 구하여라.

문제 7 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나올 때마다 100원의 상금을 받는다. 이 시행에서 받은 상금의 액수를 X원이라고 할 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차는 어떻게 구하는가?

확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때,

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$Y=aX+b\ (a,\ b\text{는 상수},\ a\neq0)$$

로 정의된 새로운 확률변수 Y에 대하여 알아보자.

$y_i=ax_i+b$라고 하면 확률변수 Y에 대하여

$$\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$$

이므로 확률변수 Y의 확률분포는 다음 표와 같다.

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	합계
$\mathrm{P}(Y=y_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

따라서 확률변수 Y의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_ip_i=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i$$
$$=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i$$
$$=a\mathrm{E}(X)+b$$

여기서 $\mathrm{E}(X)=m$이라고 하면 $\mathrm{E}(Y)=am+b$이므로

$$\mathrm{V}(Y)=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\mathrm{E}(Y)\}^2p_i=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i$$
$$=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$
$$=a^2\mathrm{V}(X)$$
$$\sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}$$
$$=|a|\sigma(X)$$

$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

$\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 $aX+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)에 대하여

(1) 평균 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) 분산 $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) 표준편차 $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

6

목표| 확률변수 X의 확률분포를 구하고, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$을 이용하여 X의 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{6}{10}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{5}-\frac{36}{25}=\frac{9}{25}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$

7

목표| 확률변수 X의 확률분포를 구하고, X의 분산과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+100\times\frac{2}{4}+200\times\frac{1}{4}=100$

$\mathrm{V}(X)$

$=(0-100)^2\times\frac{1}{4}+(100-100)^2\times\frac{2}{4}+(200-100)^2\times\frac{1}{4}$

$=\mathbf{5000}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\mathbf{50\sqrt{2}}$

보기 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=3$일 때, 확률변수 $-3X+2$의 평균과 분산 및 표준편차는

$\mathrm{E}(-3X+2)=-3\mathrm{E}(X)+2=-13$

$\mathrm{V}(-3X+2)=(-3)^2\mathrm{V}(X)=27$

$\sigma(-3X+2)=|-3|\sigma(X)=3\sqrt{3}$

문제 8 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=8$, $\mathrm{V}(X)=2$일 때, 다음 확률변수의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $4X-1$　　(2) $-2X+3$

문제 9 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, 확률변수 $Y=3X+1$의 평균과 표준편차를 구하여라. (단, a는 상수이다.)

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$2a$	$\frac{1}{4}$	a	1

발전 **문제 10** 확률변수 X의 평균이 m이고 표준편차가 σ일 때, 확률변수 Y를

$$Y=\frac{X-a}{b}$$

라고 하자. 이때 Y의 평균이 0, 표준편차가 1이 되도록 하는 상수 a, b를 m과 σ에 대한 식으로 나타내어라.

창의 up

어느 과목의 시험 점수 X의 평균이 m점이고 표준편차가 σ점일 때,

$$T=10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50$$

을 표준 점수라고 한다. 이때 표준 점수 T의 평균과 표준편차를 각각 구하는 방법을 설명하여라.

8

목표| 확률변수 $aX+b$의 평균과 분산 및 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathrm{E}(4X-1)=4\mathrm{E}(X)-1=\mathbf{31}$

$\mathrm{V}(4X-1)=4^2\mathrm{V}(X)=\mathbf{32}$

$\sigma(4X-1)=4\sigma(X)=\mathbf{4\sqrt{2}}$

(2) $\mathrm{E}(-2X+3)=-2\mathrm{E}(X)+3=\mathbf{-13}$

$\mathrm{V}(-2X+3)=(-2)^2\mathrm{V}(X)=\mathbf{8}$

$\sigma(-2X+3)=|-2|\sigma(X)=\mathbf{2\sqrt{2}}$

9

목표| 확률분포를 이용하여 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{1}{4}+2a+\frac{1}{4}+a=1$에서　$a=\frac{1}{6}$

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{6}=\frac{13}{2}$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{13}{2}-\frac{49}{9}=\frac{19}{18}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{38}}{6}$$

따라서

$\mathrm{E}(Y)=3\mathrm{E}(X)+1=\mathbf{8}$

$\sigma(Y)=3\sigma(X)=3\times\frac{\sqrt{38}}{6}=\mathbf{\frac{\sqrt{38}}{2}}$

10

목표| 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{X-a}{b}\right)=\frac{1}{b}\mathrm{E}(X)-\frac{a}{b}=\frac{m-a}{b}=0$$

에서　$a=m$

$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{X-a}{b}\right)=\frac{1}{|b|}\sigma=1$에서

$b=\pm\sigma$

따라서　$\boldsymbol{a=m,\ b=\sigma}$ **또는** $\boldsymbol{a=m,\ b=-\sigma}$

창의 UP

출제 의도| 표준 점수 T의 평균과 표준편차를 구하는 방법을 설명할 수 있게 한다.

풀이| $$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10m}{\sigma}+50\right)=\frac{10}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{10m}{\sigma}+50=\frac{10m}{\sigma}-\frac{10m}{\sigma}+50=50$$

$$\sigma(T)=\sigma\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10m}{\sigma}+50\right)=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)=\frac{10}{\sigma}\times\sigma=10$$

02 이항분포

소단원 지도 목표

① 이항분포의 뜻을 알게 한다.
② 이항분포의 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.
③ 큰 수의 법칙을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이항분포의 뜻을 구체적인 예를 통하여 직관적으로 이해하게 한다.
2. 이항분포를 기호 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 사용하여 올바르게 표현하도록 지도한다.
3. 이항분포에서 평균과 분산 및 표준편차를 구하는 공식은 이항정리를 이용하여 그 과정을 이해하고 활용하도록 한다.
4. 큰 수의 법칙은 구체적인 예를 통하여 직관적으로 이해하게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 이항분포(二項分布, binomial distribution)
• 큰 수의 법칙(law of large numbers)
• $\mathrm{B}(n,\ p)$

교과서 113쪽

02 이항분포

● 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.

이항분포란 무엇인가?

생각 열기 **항공권 초과 예약**

한 연구에 따르면 고객이 항공권을 예약하고 탑승하지 않는 경우가 전체 예약의 15 %라고 한다. 가능한 한 많은 승객을 태워야 하는 항공사로서는 이와 같은 예약 변경은 큰 손해이다. 따라서 항공사는 여러 가지 확률을 분석하여 실제 좌석 수보다 더 많은 예약을 받고 있는데 이것을 '초과 예약'이라고 한다.

탐구 활동 **어느 항공사의 항공권을 예약한 고객이 사전 통보 없이 비행기에 탑승하지 않을 통계적 확률이 0.15이고, 좌석 수가 60석인 비행기에 65명이 예약하였다고 한다. 사전 통보 없이 탑승하지 않은 승객의 수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. X가 가질 수 있는 값을 구하여 보자.
2. 좌석이 부족하게 되는 경우는 X가 어떤 값을 가질 때인지 구하여 보자.
3. 좌석이 3석 부족할 확률을 독립시행의 확률을 이용하여 나타내어 보자.

P. 89 어떤 시행을 반복하는 경우 매 시행마다 일어나는 사건이 서로 독립일 때, 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

일반적으로 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 X는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$의 값을 가지는 이산확률변수이고, 그 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\, p^x q^{n-x}\ (q=1-p,\ x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다.

이와 같은 확률변수 X의 확률분포를 **이항분포**라 하고, 기호로

$$\mathbf{B}(n,\ p)$$

와 같이 나타낸다.

이때 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다고 한다.

● 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 B는 Binomial distribution(이항분포)의 첫 글자이다.

생각 열기 참/고/자/료

비행기는 버스 또는 기차와는 달리 예약을 하였더라도 공항에서 티켓을 발권할 때 좌석을 배정받는다. 그 이유는 여러 가지가 있겠지만 일반 육상 교통과는 달리 기후에 많은 영향을 받기 때문에 불가피한 사태에 대비하여 좌석을 배정하지 않기도 하고, 노약자 등을 위한 좌석도 배정하면서 비상시에 도움을 얻고자 비상구 옆에는 젊고 건장한 사람을 배정하는 것이 관례이기 때문이다.
한편 티켓을 예약한 후 아무런 사전 통보 없이 탑승하지 않는 사람도 있기 때문에(이것을 no-show라고 한다.) 항공사 측에서는 경영상의 이유로 좌석이 비어 있을 경우를 대비하여 좌석 수보다 많은 예약을 받는 초과 예약을 하기도 한다.
그러나 최근에는 no-show율이 낮아지는 추세여서 대부분 항공사는 초과 예약을 거의 하지 않는다고 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 항공권을 예약한 고객 중 사전 통보 없이 탑승하지 않은 승객의 수를 확률변수로 가지는 확률분포에 대해 생각해 봄으로써, 확률변수가 가질 수 있는 값과 각각의 확률이 독립시행의 확률로 나타남을 이해하게 하려는 것이다.

1. 65명이 예약을 했으므로 사전 통보 없이 탑승하지 않은 고객의 수 X는 $\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \cdots,\ \mathbf{65}$의 값을 가질 수 있다.
2. 좌석 수가 60석이므로 X가 $\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4}$의 값을 가지면 좌석이 부족하게 된다.
3. 좌석이 3석 부족하게 되는 경우는 $X=2$일 때이다.

$$\mathrm{P}(X=2)={}_{65}\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{20}\right)^2\left(\frac{17}{20}\right)^{63}$$

교과서 114쪽

이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	r	$\cdots$	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_n\mathrm{C}_0\, q^n$	${}_n\mathrm{C}_1\, pq^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2\, p^2q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_r\, p^rq^{n-r}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n\, p^n$	1

이 표에서 각 확률은 이항정리에 의하여 $(p+q)^n$을 전개한 식

$$(p+q)^n={}_n\mathrm{C}_0\, q^n+{}_n\mathrm{C}_1\, pq^{n-1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_r\, p^rq^{n-r}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\, p^n$$

의 우변의 각 항과 같다.

이때 $p+q=1$이므로 $\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, p^rq^{n-r}=1$임을 알 수 있다.

문제 1 이항분포 $\mathrm{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X의 확률질량함수를 구하고, 확률분포를 표로 나타내어라.

예제 01 어느 볼링 선수는 공을 한 번 굴렸을 때, 스트라이크를 칠 확률이 0.8이라고 한다. 이 선수가 공을 3번 굴렸을 때, 스트라이크를 친 횟수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X가 따르는 분포를 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$의 형태로 나타내어라.

(2) 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

(3) 스트라이크를 친 횟수가 1 이하일 확률을 구하여라.

풀이 (1) 공을 한 번 굴렸을 때, 스트라이크를 칠 확률은 $0.8=\frac{4}{5}$이고, 매회 시행은 독립시행이다. 따라서 3번의 독립시행에서 스트라이크를 친 횟수를 확률변수 X라고 하였으므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3, \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

(2) X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x}\ (x=0, 1, 2, 3)$$

(3) 스트라이크를 친 횟수가 1 이하인 것은 $X\le1$인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X\le1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(x=1)$$
$$={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{5}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{13}{125}$$

답 (1) $\mathrm{B}\left(3, \frac{4}{5}\right)$ (2) $\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x}\ (x=0, 1, 2, 3)$ (3) $\frac{13}{125}$

교과서 115 쪽

문제 2 파란 공 4개, 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공을 한 개 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 넣는 것을 3번 시행하였다. 빨간 공이 나온 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X가 따르는 이항분포를 $\mathrm{B}(n, p)$의 형태로 나타내어라.

(2) 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

(3) 빨간 공이 2번 이상 나올 확률을 구하여라.

이항분포의 평균과 표준편차는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 동전을 4번 던져서 앞면이 나온 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내고, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하여 보자.
2. 확률변수 X가 따르는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$에 대하여 np의 값을 구하여 보자.
3. 1, 2에서 구한 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 np의 값을 비교하여 보자.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여 보자.

예를 들어 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(3, p)$를 따를 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. (단, $q=1-p$)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	1

따라서 X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=0\times q^3+1\times3pq^2+2\times3p^2q+3\times p^3$$
$$=3p(p+q)^2=3p$$
$$\mathrm{V}(X)=(0^2\times q^3+1^2\times3pq^2+2^2\times3p^2q+3^2\times p^3)-(3p)^2$$
$$=3p(p+q)(3p+q)-(3p)^2$$
$$=3pq$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3pq}$$

$q=1-p$이므로 $p+q=1$

1

목표| 이항분포의 뜻을 알게 한다.

풀이| X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^4\ (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

또 X의 확률분포표를 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

2

목표| 이항분포를 이용하여 확률질량함수와 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 빨간 공이 나온 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3, \frac{3}{7}\right)$을 따른다.

(2) 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{7}\right)^x\left(\frac{4}{7}\right)^{3-x}\ (x=0, 1, 2, 3)$$

(3) $\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(\frac{4}{7}\right)+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{7}\right)^3$

$$=\frac{135}{343}$$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내고 $\mathrm{E}(X)=np$와 같아짐을 발견하도록 한다.

1.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{16}=2$$

2. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 $np=2$

3. 같다.

교과서 116 쪽

일반적으로 이항분포 $B(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같음이 알려져 있다.

❶ **이항분포의 평균, 분산, 표준편차**

확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, $(q=1-p)$

(1) 평균 $E(X)=np$

(2) 분산 $V(X)=npq$

(3) 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

보기 확률변수 X가 이항분포 $B\left(30, \frac{2}{5}\right)$를 따를 때,

$$E(X)=30\times\frac{2}{5}=12,\ V(X)=30\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{36}{5},\ \sigma(X)=\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

문제 3 확률변수 X가 다음 이항분포를 따를 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $B\left(45, \frac{1}{3}\right)$ (2) $B\left(200, \frac{2}{5}\right)$

예제 02 두 개의 동전을 300번 던져서 둘 다 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

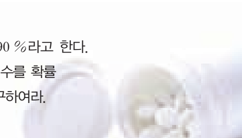
풀이 두 개의 동전을 한 번 던져서 둘 다 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이고, 매회 시행은 독립시행이다. 따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(300, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=300\times\frac{1}{4}=75,\ V(X)=300\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{225}{4}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$$

답 $E(X)=75,\ V(X)=\frac{225}{4},\ \sigma(X)=\frac{15}{2}$

문제 4 새로 개발된 약으로 임상 시험을 한 결과 완치율이 90 %라고 한다. 이 약으로 100명의 환자를 치료해서 완치되는 환자의 수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.



본문 해설

❶ 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, X의 확률분포는

$P(X=r)={}_{n}C_{r}p^{r}q^{n-r}$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$, $q=1-p$)이므로

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{r=0}^{n}r\cdot P(X=r)\\&=\sum_{r=1}^{n}r\cdot{}_{n}C_{r}p^{r}q^{n-r}\\&=\sum_{r=1}^{n}n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}p^{r}q^{n-r}\\&=np\sum_{r=1}^{n}{}_{n-1}C_{r-1}p^{r-1}q^{(n-1)-(r-1)}\\&=np(p+q)^{n-1}\\&=np\end{aligned}$$

$E(X^2)$

$$\begin{aligned}&=\sum_{r=0}^{n}r^2\cdot{}_{n}C_{r}p^{r}q^{n-r}\\&=\sum_{r=1}^{n}r(r-1){}_{n}C_{r}p^{r}q^{n-r}+\sum_{r=1}^{n}r\cdot{}_{n}C_{r}p^{r}q^{n-r}\\&=\sum_{r=1}^{n}r(r-1){}_{n}C_{r}p^{r}q^{n-r}+np\\&=\sum_{r=2}^{n}n(n-1){}_{n-2}C_{r-2}p^{r}q^{n-r}+np\\&=n(n-1)p^2\sum_{r=2}^{n}{}_{n-2}C_{r-2}p^{r-2}q^{(n-2)-(r-2)}+np\\&=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np\\&=n(n-1)p^2+np\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=n(n-1)p^2+np-(np)^2\\&=np(1-p)\\&=npq\end{aligned}$$

3

목표| 이항분포의 평균과 분산 및 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $E(X)=45\times\frac{1}{3}=\mathbf{15}$

$V(X)=45\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\mathbf{10}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\mathbf{\sqrt{10}}$

(2) $E(X)=200\times\frac{2}{5}=\mathbf{80}$

$V(X)=200\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\mathbf{48}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{48}=\mathbf{4\sqrt{3}}$

4

목표| 이항분포의 평균과 분산 및 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{9}{10}\right)$를 따르므로

$E(X)=100\times\frac{9}{10}=\mathbf{90}$

$V(X)=100\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\mathbf{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{9}=\mathbf{3}$

큰 수의 법칙이란 무엇인가?

탐구 활동 한 개의 주사위를 n번 던져서 1이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 1의 눈이 나오는 상대도수 $\frac{X}{n}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 주사위를 10번 던졌을 때, 상대도수 $\frac{X}{10}$의 값을 구하여 보자.

2. 주사위를 30번 던졌을 때, 상대도수 $\frac{X}{30}$의 값을 구하여 보자.

3. 주사위를 50번 던졌을 때, 상대도수 $\frac{X}{50}$의 값을 구하여 보자.

4. n이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{X}{n}$의 값은 어떤 수에 가까워지는지 추측하여 보자.

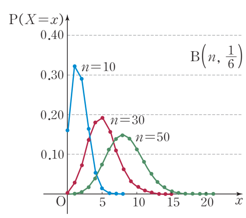
한 개의 주사위를 n번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다는 사실을 이용하여 n이 커짐에 따라 1의 눈이 나오는 횟수의 상대도수 $\frac{X}{n}$와 수학적 확률 $\frac{1}{6}$ 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아보자.

이산확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{n-x}$$

$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이므로 n의 값이 10, 30, 50일 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같고 그래프로 나타내면 다음과 같다.



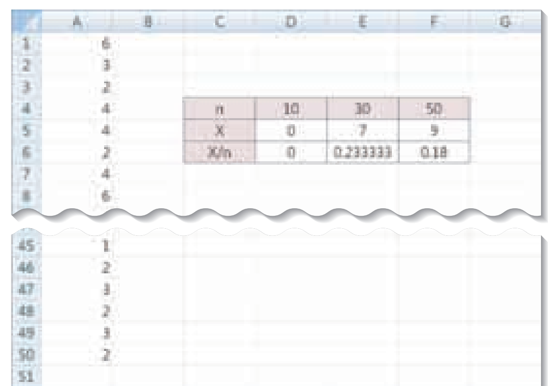
x \ n	10	30	50
0	0.1615	0.0042	0.0001
1	0.3230	0.0253	0.0011
2	0.2907	0.0733	0.0054
3	0.1550	0.1368	0.0172
4	0.0543	0.1847	0.0405
5	0.0130	0.1921	0.0745
6	0.0022	0.1601	0.1118
7	0.0002	0.1098	0.1405
8	0.0000	0.0631	0.1510
9	⋮	0.0309	0.1410
10		0.0130	0.1156
11		0.0047	0.0841
12		0.0015	0.0546
13		0.0004	0.0319
14		0.0001	0.0169
15		0.0000	0.0081
16		⋮	0.0035
17			0.0014
18			0.0005
19			0.0002
20			0.0001
21			0.0000
22			⋮

참고| 주사위를 직접 50번 던져 보지 않고 스프레드시트를 이용하여 탐구해 볼 수도 있다.

① A1 셀에 '=RANDBETWEEN(1, 6)'을 입력하고 채우기 핸들을 이용하여 A50 셀까지 드래그하여 주사위에서 나올 수 있는 숫자의 난수 50개를 구한다.

② D5 셀에 '=COUNTIF(A1:A10,″1″)', E5 셀에 '=COUNTIF(A1:A30,″1″)', F5 셀에 '=COUNTIF(A1:A50,″1″)'을 입력하여 $n=10,\ 30,\ 50$일 때의 X를 구한다.

③ D6 셀에 '=D5/10', E6 셀에 '=E5/30', F6 셀에 '=F5/50'을 입력하여 $n=10,\ 30,\ 50$일 때의 $\frac{X}{n}$의 값을 구한다.



탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주사위를 10번, 30번, 50번 던져 각각 1의 눈이 나온 횟수를 조사해 상대도수의 값을 구해 봄으로써, 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에서 n의 값이 커질수록 수학적 확률과 통계적 확률의 차가 작아짐을 확인해 보도록 한다.

1. 주사위를 10번 던져서 나온 1의 눈이 나온 횟수를 구하여 X로 놓고 $\frac{X}{10}$의 값을 구한다.

2. 주사위를 20번 던져서 나온 1의 눈이 나온 횟수를 구하여 a로 놓고, **1**에서 구한 1의 눈이 나온 횟수를 b라고 한 후 $\frac{a+b}{30}$의 값을 구한다.

3. 주사위를 20번 던져서 나온 1의 눈이 나온 횟수를 구하여 c로 놓고, **2**에서 구한 $a+b$의 값을 이용하여 $\frac{a+b+c}{50}$의 값을 구한다.

4. n이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{X}{n}$의 값은 $\frac{1}{6}$에 가까워진다.

본문 해설

❶ $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)$은 상대도수 $\frac{X}{n}$와 수학적 확률 $\frac{1}{6}$의 차가 0.1보다 작을 확률을 의미하고, n의 값이 커짐에 따라 이 확률도 점점 커짐을 계산으로 확인할 수 있다. 이 계산으로 상대도수 $\frac{X}{n}$의 극한값으로 통계적 확률을 생각할 때 생기는 문제에 대한 답을 얻을 수 있다. 즉, $n=10,\ 30,\ 50$일 때 확률이 점점 커져서 두 값이 거의 유사하게 된다는 사실을 확인할 수 있다.

❷ 독립시행에서 시행횟수 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른 것이 큰 수의 법칙이다. 이 법칙에 의해 통계적 확률을 수학적 확률의 근삿값으로 사용할 수 있음을 알 수 있다.

교과서 118 쪽

① 이제 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표를 이용하여 n의 값이 10, 30, 50일 때, 주사위의 1의 눈이 나오는 상대도수 $\frac{X}{n}$와 수학적 확률 $\frac{1}{6}$의 차가 0.1보다 작을 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)$을 각각 구하여 보자.

$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1$에서
$-\frac{1}{10}<\frac{X}{n}-\frac{1}{6}<\frac{1}{10}$
$\frac{n}{15}<X<\frac{4n}{15}$

(i) $n=10$일 때,

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{10}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)=\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}<X<\frac{8}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=0.6137$$

(ii) $n=30$일 때,

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{30}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)=\mathrm{P}(2<X<8)$$
$$=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=7)=0.7835$$

(iii) $n=50$일 때,

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{50}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)=\mathrm{P}\left(\frac{10}{3}<X<\frac{40}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\cdots+\mathrm{P}(X=13)=0.9455$$

이로부터 주사위의 1의 눈이 나오는 상대도수와 수학적 확률과의 차가 0.1보다 작을 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)$은 n이 커질수록 1에 가까워짐을 알 수 있다.

이와 같은 결과는 그 차이를 0.1에서 0.01, 0.001, …과 같은 임의의 양수로 바꾸어도 마찬가지로 성립한다.

일반적으로 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 상대도수 $\frac{X}{n}$는 n의 값이 커질수록 수학적 확률 p에 가까워짐이 알려져 있는데 이것을 **큰 수의 법칙**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

② **큰 수의 법칙**
어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 상대도수 $\frac{X}{n}$는 n의 값이 커질수록 수학적 확률 p에 가까워진다.

문제 5 117쪽의 확률분포표를 이용하여 n의 값이 10, 30, 50일 때, 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.05\right)$를 각각 구하여 보고 n의 값이 커짐에 따라 그 값이 1에 가까워짐을 확인하여라.

5

목표 | 주어진 n의 값에 따라 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.05\right)$를 구하여 보고, n의 값이 커짐에 따라 그 값이 1에 가까워짐을 확인하게 한다.

풀이 | $\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.05$

$\Longleftrightarrow\ -0.05<\frac{X}{n}-\frac{1}{6}<0.05$

$\Longleftrightarrow\ \frac{1}{6}-0.05<\frac{X}{n}<\frac{1}{6}+0.05$

$\Longleftrightarrow\ n\left(\frac{1}{6}-0.05\right)<X<n\left(\frac{1}{6}+0.05\right)$

$\Longleftrightarrow\ n(0.1166\cdots)<X<n(0.2166\cdots)$

(i) $n=10$일 때

$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{10}-\frac{1}{6}\right|<0.05\right)$
$=\mathrm{P}(1.166\cdots<X<2.166\cdots)$
$=\mathrm{P}(X=2)$
$=0.2907$

(ii) $n=30$일 때

$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{30}-\frac{1}{6}\right|<0.05\right)$
$=\mathrm{P}(3.498\cdots<X<6.498\cdots)$
$=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)$
$=0.1847+0.1921+0.1601$
$=0.5369$

(iii) $n=50$일 때

$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{50}-\frac{1}{6}\right|<0.05\right)=\mathrm{P}(5.83\cdots<X<10.83\cdots)$
$=\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=7)+\mathrm{P}(X=8)+\mathrm{P}(X=9)$
$\quad+\mathrm{P}(X=10)$
$=0.1118+0.1405+0.1510+0.1410+0.1156$
$=0.6599$

(i)~(iii)에 의하여 n의 값이 커짐에 따라 그 값이 1에 가까워짐을 확인할 수 있다.

지/도/자/료 큰 수의 법칙

상대도수 $\frac{X}{n}$의 극한값으로 통계적 확률을 생각할 때 $\frac{X}{n}$의 극한값은 실제로 계산하기가 곤란하여 수학적 확률 p에 가까워진다고 한다. 즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{X}{n}=p$ ……①

이때 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{X}{n}=p$의 뜻은 다음과 같이 생각할 수 있다.

임의의 양수 h에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)=1$ ……②

그러나 ②는 ①과 약간의 차이가 있다. ①은 임의의 양수 ε을 아무리 작게 잡더라도 적당히 큰 자연수 N이 존재하여 $n>N$인 모든 자연수 n에 대하여 $\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon$이 반드시 성립함을 의미하나 ②는 자연수 n을 아무리 크게 잡더라도 $\left|\frac{X}{n}-p\right|<h$ 성립하지 않을 가능성을 가지고 있으며, 다만 n이 커질수록 $\left|\frac{X}{n}-p\right|<h$가 성립할 가능성이 높아진다. 즉, n이 커질수록 $\left|\frac{X}{n}-p\right|<h$가 성립할 확률이 1에 가까워진다는 뜻이다.

교과서 119 쪽

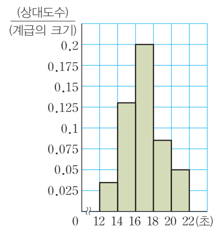
03 정규분포

● 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

연속확률변수란 무엇인가?

탐구 활동 다음은 어느 학교 학생 100명의 달리기 기록을 조사하여 나타낸 표와, 이 표를 가로축은 기록, 세로축은 $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$로 하여 그린 히스토그램이다. 물음에 답하여 보자.

기록(초)	상대도수	$\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$
12 이상 ~ 14 미만	0.07	0.035
14 ~ 16	0.26	0.13
16 ~ 18	0.4	0.2
18 ~ 20	0.17	0.085
20 ~ 22	0.1	0.05
합계	1	



1. 임의로 1명의 학생을 택하였을 때, 이 학생의 달리기 기록이 16초 이상 18초 미만일 확률을 표를 이용하여 구하여 보자.
2. 히스토그램에서 달리기 기록이 16초 이상 18초 미만인 계급에 해당하는 색칠한 직사각형의 넓이를 구한 후 **1**의 결과와 비교하여 보자.

❶ 탐구 활동에서 학생의 달리기 기록을 X초라고 하면 X는 $12 \leq X < 22$를 만족시키는 모든 실수의 값을 가지는 확률변수이다. 이와 같이 어떤 연속하는 범위 안에서 모든 실수의 값을 가지는 확률변수를 **연속확률변수**라고 한다.

히스토그램의 각 직사각형의 넓이는

$$(\text{직사각형의 넓이}) = (\text{계급의 크기}) \times \frac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$$
$$= (\text{상대도수})$$

이므로 각 계급의 상대도수를 나타내고, 상대도수의 합이 1이므로 직사각형들의 넓이의 합은 항상 1이 된다.

03 정규분포

소단원 지도 목표

① 연속확률변수의 뜻을 알게 한다.
② 확률밀도함수의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
③ 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하게 한다.
④ 표준정규분포의 뜻을 알고, 정규분포의 표준화를 이해하게 한다.
⑤ 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 어느 구간에 속하는 모든 실수의 값을 가지는 확률변수가 연속확률변수임을 구체적인 예를 통하여 이해하게 한다.

2. 확률질량함수와 달리 확률밀도함수는 그 값에서 확률을 나타내지 않음을 이해하게 한다.

3. 연속확률변수에 대해서는 $\mathrm{P}(X=x)=0$임을 이해하게 한다.

4. 평균과 표준편차의 차이에 따른 정규분포의 확률밀도함수의 그래프의 성질을 명확히 알게 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 연속확률변수(連續確率變數, continuous random variable)
- 확률밀도함수(確率密度函數, probability density function)
- 정규분포(正規分布, normal distribution)
- 표준화(標準化, standardization)
- 표준정규분포(標準正規分布, standard normal distribution)
- $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0, 1)$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 연속확률변수는 어느 구간에 속하는 모든 값을 취할 수 있음을 이해하고, $\dfrac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$를 히스토그램으로 나타내면 상대도수가 히스토그램의 직사각형의 넓이와 같음을 이해하게 한다.

1. 16초 이상 18초 미만의 상대도수가 0.4이므로 이 구간에 속할 확률은 **0.4**이다.

2. 16초 이상 18초 미만인 계급에 해당하는 직사각형의 넓이는 0.4로 **1**에서 구한 확률과 같다.

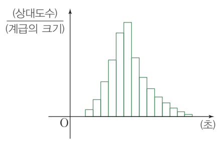
본문 해설

❶ 확률변수에는 확률변수가 가지는 값이 유한개이거나 자연수와 같이 셀 수 있는 값을 가지는 이산확률변수와 어떤 구간에서 연속적인 값을 취하는 연속확률변수가 있다. 앞에서 배운 이항분포는 이산확률분포를 대표하는 것이고 앞으로 배울 정규분포는 연속확률변수를 대표하는 것이다.

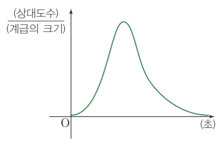
교과서 120 쪽

이때 조사 대상의 수를 늘리고 계급의 크기를 작게 하여 히스토그램을 그리면 〈그림 1〉을 얻을 수 있다.

또 조사 대상의 수를 한없이 늘리고 계급의 크기를 한없이 작게 하면 히스토그램은 〈그림 2〉와 같이 매끄러운 곡선이 될 것이다.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

이때 이 곡선은 항상 가로축 위에 있고, 이 곡선과 가로축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이 된다.

일반적으로 $\alpha\le x\le\beta$에서 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 함수 $f(x)$가 존재하는데 이 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 **확률밀도함수**라고 한다.

일반적으로 확률밀도함수는 다음과 같은 성질을 가진다.

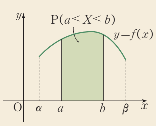
확률밀도함수의 성질

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$ $(\alpha\le x\le\beta)$이면

(1) $f(x)\ge 0$

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

(3) 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$ $(\alpha\le a\le b\le\beta)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



참고 $\alpha\le x\le\beta$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$에 대하여 미적분 Ⅰ 의 다항함수의 적분법에서 배우는 정적분을 이용하면 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

(1) 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$ $(\alpha\le a\le b\le\beta)$는

$$\mathrm{P}(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$$

(2) 임의의 상수 c에 대하여 $\int_c^c f(x)dx=0$이므로

$$\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}(a<X\le b)=\mathrm{P}(a\le X<b)=\mathrm{P}(a<X<b)$$

교과서 121 쪽

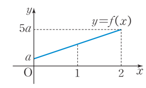
예제 01 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=2ax+a\ (0\le x\le 2)$$

일 때, 다음을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

(1) a의 값 (2) 확률 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

풀이 (1) 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로 $\frac{1}{2}\times(a+5a)\times 2=1$



따라서 $a=\frac{1}{6}$이다.

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$에서 $f(1)=\frac{1}{2}$

확률 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{1}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$

문제 1 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=ax+b\ (0\le x\le 3)$$

이고 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{4}$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

실생활

문제 2 소은이는 8시에 버스 정류장에 도착하여 8시와 8시 20분 사이의 임의의 시각에 도착하는 버스를 기다리고 있다. 소은이가 버스를 기다리는 시간이 5분 이상 15분 이하일 확률을 구하여라.

사고력 기르기

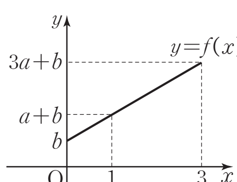
추론
의사소통
▶문제 해결

연속확률변수 X가 1 이상 5 이하의 모든 실수 값을 가질 때, 확률 $\mathrm{P}(X=2)$를 구하여 보자.

1

목표| 확률밀도함수의 성질을 이해하게 한다.

풀이| 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로



$\frac{1}{2}\times(3a+2b)\times 3=1$에서

$3a+2b=\frac{2}{3}$ $\cdots\cdots$ ①

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{1}{2}\times(a+2b)\times 1=\frac{1}{4}$에서 $a+2b=\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ②

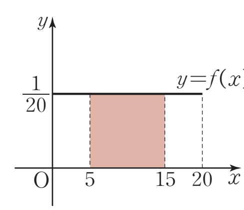
①, ②를 연립하여 풀면

$a=\mathbf{\frac{1}{12}}$, $b=\mathbf{\frac{5}{24}}$

2

목표| 확률밀도함수의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 소은이가 버스를 기다리는 시간(분)을 확률변수 X라고 하면 X의 확률밀도함수는



$$f(x)=\frac{1}{20}\ (0\le x\le 20)$$

이다. 따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(5\le X\le 15)=(15-5)\times\frac{1}{20}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

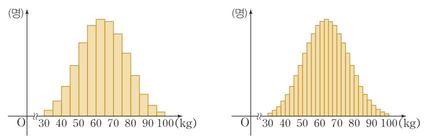
사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 연속확률변수에 대해서는 $\mathrm{P}(X=x)=0$임을 이해하게 한다.

풀이| 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$ $(1\le x\le 5)$일 때, $1\le a\le b\le 5$인 a, b에 대하여 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(2\le X\le 2)=0$

정규분포란 무엇인가?

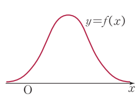
탐구 활동 다음은 어느 학교 학생 1000명의 몸무게를 조사하여 만든 히스토그램으로 〈그림 1〉과 〈그림 2〉의 계급의 크기는 각각 5 kg, 2.5 kg이다. 물음에 답하여 보자.



〈그림 1〉 〈그림 2〉

1. 〈그림 1〉과 〈그림 2〉의 히스토그램을 도수분포다각형으로 그려 보자.
2. 계급의 크기를 0에 가깝게 하였을 때, 도수분포다각형은 어떤 모양이 될지 말하여 보자.

자연 현상이나 사회 현상 중에는 확률밀도함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 어떤 값을 중심으로 대칭적으로 분포하며 중심에서 멀어질수록 도수가 작아지는 종 모양의 곡선에 가깝게 나타나는 경우가 많이 있다.



❶ 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

일 때, X의 확률분포를 **정규분포**라고 한다. 여기서 m과 σ $(\sigma>0)$는 각각 연속확률변수 X의 평균과 표준편차를 나타내는 상수이고, e는 그 값이 2.71828$\cdots$인 무리수이다.

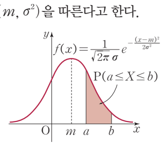
이와 같이 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로

$$\mathbf{N(m,\ \sigma^2)}$$

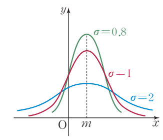
과 같이 나타낸다. 이때 연속확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 한다.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$에서 N은 Normal distribution(정규분포)의 첫 글자이다.

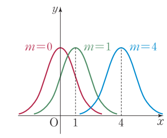
연속확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 $a\le x\le b$에서 확률밀도함수의 그래프와 x축 사이의 넓이이다.



❷ 한편 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 m과 σ의 값에 따라 다음과 같이 그 모양이 정해진다.



[m의 값이 일정할 때]



[σ의 값이 일정할 때]

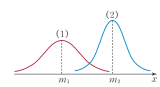
정규분포의 확률밀도함수의 그래프를 정규분포곡선이라 하고, 정규분포곡선을 그릴 때에는 y축을 생략하고 그리기도 한다.

일반적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$의 확률밀도함수의 그래프는 다음과 같은 성질을 가진다.

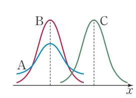
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$의 확률밀도함수의 그래프의 성질

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고, 점근선은 x축이다.
(2) 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
(3) $x=m$일 때, 최댓값을 가진다.
(4) m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커질수록 곡선이 낮아지면서 양옆으로 퍼지고, σ의 값이 작아질수록 곡선이 높아지면서 좁아진다.
(5) σ의 값이 일정할 때, m의 값이 달라지면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 변하지 않는다.

보기 오른쪽 그림에서 (1)은 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ {\sigma_1}^2)$의 확률밀도함수의 그래프이고 (2)는 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ {\sigma_2}^2)$의 확률밀도함수의 그래프일 때, $m_1<m_2$이고 $\sigma_1>\sigma_2$이다.



문제 3 오른쪽 그림에서 곡선 A, B, C는 각각 정규분포를 따르는 세 확률변수 X_{A}, X_{B}, X_{C}의 확률밀도함수의 그래프이다. 곡선 A, B의 대칭축은 서로 같고, 곡선 C는 곡선 B를 평행이동한 것이다. X_{A}, X_{B}, X_{C}의 평균을 각각 m_{A}, m_{B}, m_{C}라 하고 표준편차를 각각 σ_{A}, σ_{B}, σ_{C}라고 할 때, 다음의 대소를 비교하여라.

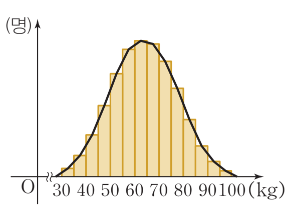


(1) m_{A}, m_{B}, m_{C} (2) σ_{A}, σ_{B}, σ_{C}

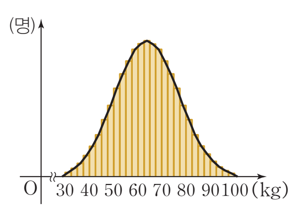
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 그래프가 좌우대칭의 종 모양의 곡선에 가까운 확률밀도함수를 가지는 연속확률변수에 대한 고찰을 통하여 정규분포곡선에 대한 이해를 돕도록 한다.

1.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

2. 계급의 크기가 0에 가까워짐에 따라 점차 좌우대칭인 매끄러운 종 모양의 곡선이 될 것이다.

본문 해설

❶ 정규분포는 자연 현상이나 사회 현상에서 실제로 자주 나타나는 관측 자료의 이론적 연구에 적합한 분포로서 가우스(Gauss, K. F. ; 1777~1855)에 의하여 물리학 등에 폭넓게 응용되었는데, 이러한 이유로 정규분포를 가우스 분포 또는 오차분포라고도 한다.

❷ σ의 값이 커지면 확률밀도함수의 그래프의 모양은 아래로 낮아지면서 양옆으로 넓어지고, σ의 값이 작아지면 위로 높아지면서 좁아진다.

3

목표| 정규분포의 확률밀도함수의 그래프의 성질을 이해하게 한다.

풀이| (1) $m_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{B}}<m_{\mathrm{C}}$ (2) $\sigma_{\mathrm{A}}>\sigma_{\mathrm{B}}=\sigma_{\mathrm{C}}$

교과서 124 쪽

표준정규분포란 무엇인가?

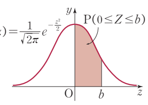
평균이 0이고 분산이 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 하고, 기호로 **N(0, 1)**과 같이 나타낸다.

표준정규분포를 따르는 확률변수는 흔히 Z로 표현한다.

❶ 확률변수 Z가 표준정규분포 N(0, 1)을 따를 때, Z의 확률밀도함수는

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



임의의 양수 b에 대하여 Z가 0 이상 b 이하의 값을 가질 확률 $P(0\le Z\le b)$는 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같고, 그 값은 이 책의 부록에 실려 있는 표준정규분포표에서 찾을 수 있다.

P. 181 표준정규분포표

이를테면 표준정규분포표에서

$$P(0\le Z\le 1.96)=0.4750$$

이고

$$P(0\le Z\le 2)=0.4772$$

임을 알 수 있다.

z	0	1	5	6	7
0.0	.0000	.0040	.0199	.0239	.0279
0.1	.0398	.0438	.0596	.0636	.0675
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.9	.4713	.4719	.4744	.4750	.4756
2.0	.4772	.4778	.4798	.4803	.4808

참고 표준정규분포 N(0, 1)을 따르는 확률변수 Z의 확률밀도함수 $y=f(z)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

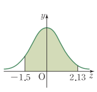
(1) $P(Z\ge 0)=P(Z\le 0)=0.5$

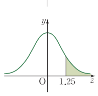
(2) $P(-a\le Z\le 0)=P(0\le Z\le a)$ (단, $a\ge 0$)

(3) $P(-a\le Z\le a)=2P(0\le Z\le a)$ (단, $a\ge 0$)

예제 02 확률변수 Z가 표준정규분포 N(0, 1)을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $P(-1.5\le Z\le 2.13)$　　(2) $P(Z\ge 1.25)$





풀이 (1) $P(-1.5\le Z\le 2.13)=P(-1.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2.13)$
$=P(0\le Z\le 1.5)+P(0\le Z\le 2.13)$
$=0.4332+0.4834=0.9166$

(2) $P(Z\ge 1.25)=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.25)$
$=0.5-0.3944=0.1056$

답 (1) 0.9166　(2) 0.1056

교과서 125 쪽

문제 4 확률변수 Z가 표준정규분포 N(0, 1)을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $P(-1.83\le Z)$　　(2) $P(1.65\le Z\le 2)$

(3) $P(Z\le 0.95)$　　(4) $P(|Z|\le 1.96)$

❷ 확률변수 X가 정규분포를 따를 때, 두 상수 a, b ($a\ne 0$)에 대하여 확률변수 $aX+b$도 정규분포를 따른다는 것이 알려져 있다.

따라서 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z의 평균과 분산은

$$E(Z)=E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{E(X)-m}{\sigma}=\frac{m-m}{\sigma}=0$$

$$V(Z)=V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{V(X)}{\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

이므로 Z는 표준정규분포 N(0, 1)을 따른다.

이와 같이 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준정규분포 N(0, 1)을 따르는 확률변수 Z로 바꾸는 것을 **표준화**한다고 한다.

한편 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때, X가 a 이상 b 이하의 값을 가질 확률은

$$P(a\le X\le b)=P\left(\frac{a-m}{\sigma}\le\frac{X-m}{\sigma}\le\frac{b-m}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)$$

이므로 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **정규분포의 표준화**
> 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때,
> (1) 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 N(0, 1)을 따른다.
> (2) $P(a\le X\le b)=P\left(\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)$

본문 해설

❶ 정규분포에서 $m=0$, $\sigma=1$인 경우 표준정규분포라고 하므로 확률밀도함수는

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1}e^{-\frac{(x-0)^2}{2\cdot 1^2}}$$ 에서

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

이 된다.

4

목표| 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $P(-1.83\le Z)=0.5+P(0\le Z\le 1.83)$
$=0.5+0.4664$
$=\mathbf{0.9664}$

(2) $P(1.65\le Z\le 2)=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1.65)$
$=0.4772-0.4505$
$=\mathbf{0.0267}$

(3) $P(Z\le 0.95)=0.5+P(0\le Z\le 0.95)$
$=0.5+0.3289$
$=\mathbf{0.8289}$

(4) $P(|Z|\le 1.96)=P(-1.96\le Z\le 1.96)$
$=2P(0\le Z\le 1.96)$
$=2\times 0.4750$
$=\mathbf{0.9500}$

본문 해설

❷ 임의의 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 변환 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$에 의하여 N(0, 1)을 따르도록 하는 표준화의 필요성을 이해하고, 확률 계산을 할 수 있게 부록의 표준정규분포표를 이용하는 방법을 익히도록 한다.

교과서 126 쪽

예제 03 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(14\le X\le 31)$을 구하여라.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-20}{5}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(14\le X\le 31)&=\mathrm{P}\left(\frac{14-20}{5}\le\frac{X-20}{5}\le\frac{31-20}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.2\le Z\le 2.2)\\&=\mathrm{P}(-1.2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.2)\\&=0.3849+0.4861\\&=0.8710\end{aligned}$$

답 0.8710

문제 5 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(35,\ 3^2)$을 따를 때, 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(32\le X\le 38)$ (2) $\mathrm{P}(26\le X\le 29)$ (3) $\mathrm{P}(X>41)$

예제 04 A 회사에서 생산한 두루마리 화장지의 길이는 평균이 50 m, 표준편차가 40 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 두루마리 화장지 중에서 한 개를 임의로 선택하였을 때, 그 길이가 51 m 이상일 확률을 구하여라.

풀이 두루마리 화장지의 길이를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 0.4^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-50}{0.4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 51)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-50}{0.4}\ge\frac{51-50}{0.4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.4938\\&=0.0062\end{aligned}$$

답 0.0062

5

목표| 표준화를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(35,\ 3^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-35}{3}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(32\le X\le 38)$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}\left(\frac{32-35}{3}\le\frac{X-35}{3}\le\frac{38-35}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.3413\\&=\mathbf{0.6826}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{P}(26\le X\le 29)$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}\left(\frac{26-35}{3}\le\frac{X-35}{3}\le\frac{29-35}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(-3\le Z\le -2)\\&=\mathrm{P}(2\le Z\le 3)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.4987-0.4772\\&=\mathbf{0.0215}\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{P}(X>41)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-35}{3}>\dfrac{41-35}{3}\right)$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}(Z>2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=\mathbf{0.0228}\end{aligned}$$

지/도/자/료 표준정규분포

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Y=aX+b$는 정규분포 $\mathrm{N}(am+b,\ (a\sigma)^2)$을 따른다. 즉, 정규분포는 선형변환해도 그 분포는 변하지 않는다. 이와 같은 성질을 정규분포의 불변성이라고 한다.

따라서 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$에 대하여 $\mathrm{E}(Z)=0,\ \mathrm{V}(Z)=1$이므로 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이때 표준정규분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\ (-\infty<z<\infty)$$

이 함수는

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<\infty)$에서 $m=0,\ \sigma=1$일 때이다.

6

목표| 표준화를 이용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 김밥 1개의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-200}{10}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X<190)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-200}{10}<\frac{190-200}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z<-1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

따라서 편의점에서 판매하는 김밥 중 무게가 190 g 미만인 것은 전체의 **15.87 %**이다.

교과서 127 쪽

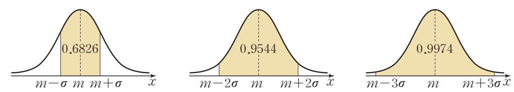
실생활

문제 6 어느 편의점에서 판매하는 김밥 1개의 무게는 평균이 200 g, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 편의점에서 판매하는 김밥 중 무게가 190 g 미만인 것은 전체의 몇 %인지 구하여라.

❶ 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 다음을 알 수 있다.

$$\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+\sigma)=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 1)=0.6826$$
$$\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma)=\mathrm{P}(-2 \le Z \le 2)=0.9544$$
$$\mathrm{P}(m-3\sigma \le X \le m+3\sigma)=\mathrm{P}(-3 \le Z \le 3)=0.9974$$

즉, X와 평균의 차가 σ, 2σ, 3σ 이내에 있을 확률은 각각 0.6826, 0.9544, 0.9974이다.



보기 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(m-1.96\sigma \le X \le m+1.96\sigma)&=\mathrm{P}(-1.96 \le Z \le 1.96)\\&=2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)\\&=2\times 0.4750=0.95\end{aligned}$$

문제 7 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때,

$$\mathrm{P}(m-k\sigma \le X \le m+k\sigma)=0.97$$

을 만족시키는 상수 k의 값을 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

오른쪽 표는 진수의 국어, 수학, 영어 과목의 점수와 반 전체 학생 35명의 각 과목 점수의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 반 전체 학생의 각 과목의 점수는 정규분포를 따른다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

과목	국어	수학	영어
진수	85	80	82
반 전체 평균	82	70	79
반 전체 표준편차	4	8	6

(1) 진수의 각 과목의 점수를 표준화하여 보자.
(2) 진수는 각 과목에서 대략 몇 등을 차지하였는지 구하여 보자.
(3) 진수가 가장 높은 점수를 얻은 국어 과목의 등수를 다른 과목의 등수와 비교하여 보고, 정규분포를 표준정규분포로 표준화하는 이유를 말하여 보자.

본문 해설

❶ 정규분포의 개념은 앞으로 배울 추정의 기초가 될 뿐 아니라, 특히 다음의 사실은 자주 사용되는 수치이므로 이를 알아둔다.

$$\begin{aligned}|X-m|<2\sigma &\iff -2\sigma<X-m<2\sigma\\&\iff -2<\frac{X-m}{\sigma}<2\\&\iff -2<Z<2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X-m|<2\sigma)&=\mathrm{P}(-2<Z<2)\\&=2\mathrm{P}(0<Z<2)\\&=2\times 0.4772\\&=0.9544\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|X-m|<3\sigma &\iff -3\sigma<X-m<3\sigma\\&\iff -3<\frac{X-m}{\sigma}<3\\&\iff -3<Z<3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X-m|<3\sigma)&=\mathrm{P}(-3<Z<3)\\&=2\mathrm{P}(0<Z<3)\\&=2\times 0.4987\\&=0.9974\end{aligned}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+\sigma)=0.6826$$
$$\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma)=0.9544$$
$$\mathrm{P}(m-3\sigma \le X \le m+3\sigma)=0.9974$$

7

목표| 표준화를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(m-k\sigma \le X \le m+k\sigma)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{m-k\sigma-m}{\sigma} \le \frac{X-m}{\sigma} \le \frac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(-k \le Z \le k)\\&=2\mathrm{P}(0 \le Z \le k)\end{aligned}$$

그런데 $\mathrm{P}(m-k\sigma \le X \le m+k\sigma)=0.97$이므로

$\mathrm{P}(0 \le Z \le k)=0.485$

따라서 $k=\mathbf{2.17}$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 표준화를 이용하여 서로 다른 정규분포를 따르는 각 과목의 점수를 비교하여 상대적인 위치를 파악할 수 있게 한다.

풀이| (1) 국어: **0.75** 수학: **1.25** 영어: **0.5**

(2) $\mathrm{P}(Z \ge 0.75)=0.2266$이므로 진수보다 국어 점수가 높은 학생은 8명 정도 있다고 볼 수 있으므로 **9등**이다.
$\mathrm{P}(Z \ge 1.25)=0.1056$이므로 진수보다 수학 점수가 높은 학생은 4명 정도 있다고 볼 수 있으므로 **5등**이다.
$\mathrm{P}(Z \ge 0.5)=0.3085$이므로 진수보다 영어 점수가 높은 학생은 11명 정도 있다고 볼 수 있으므로 **12등**이다.

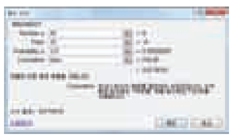
(3) 가장 낮은 점수를 얻은 수학이 가장 등수가 높다. 이와 같이 평균과 표준편차가 제각각인 정규분포를 표준화하여 표준정규분포표를 이용해 구하고자 하는 확률뿐만 아니라 상대적 위치도 쉽게 구할 수 있다.

교과서 128 쪽

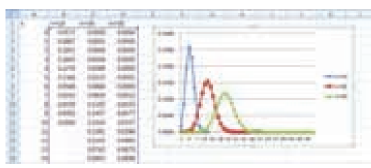
이항분포와 정규분포는 어떤 관계가 있는가?

탐구 활동 한 개의 주사위를 n번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다. 컴퓨터 프로그램을 이용하여 n의 값이 10, 30, 50일 때 X의 확률분포를 구하고, n의 값이 커짐에 따라 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 말하여 보자.

❶ A1 셀부터 D1 셀까지 각각 x, $n=10$, $n=30$, $n=50$을 입력하고, A2 셀부터 A52 셀까지 0, 1, 2, ⋯, 50을 차례로 입력한다.
❷ B2 셀을 선택하고 '수식' 메뉴에서 '함수 삽입'을 선택한다.
❸ '함수 마법사' 창이 나타나면 범주 선택에서 '통계'를, 함수 선택에서 'BINOMDIST'를 선택하고 확인을 누른다.
❹ '함수 인수' 창이 나타나면 다음과 같이 인수를 입력하고 확인을 누른다.

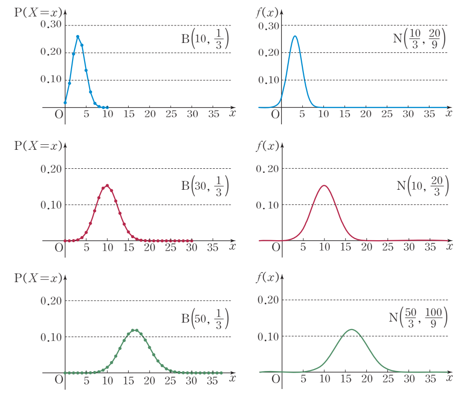


❺ B2 셀의 채우기 핸들을 이용하여 $n=10$일 때의 확률분포를 구한다.
❻ C2 셀을 선택하고 Trials 인수를 30으로 변경하여 ❷~❹의 과정을 수행한다. 그리고 C2 셀의 채우기 핸들을 이용하여 $n=30$일 때의 확률분포를 구한다.
❼ D2 셀을 선택하고 Trials 인수를 50으로 변경하여 ❷~❹의 과정을 수행한다. 그리고 D2 셀의 채우기 핸들을 이용하여 $n=50$일 때의 확률분포를 구한다.
❽ B2 셀부터 D52 셀까지 선택하고 '삽입' 메뉴의 '차트' 항목 중에서 '꺾은선형'의 '표식이 있는 꺾은선형'을 선택하면 아래와 같이 세 분포의 그래프가 나타난다.



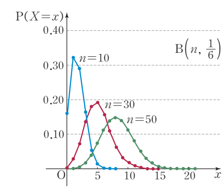
교과서 129 쪽

$n=10,\ 30,\ 50$일 때의 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같이 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{3},\ \frac{2n}{9}\right)$의 그래프에 가까워지는 것을 확인할 수 있다.



❶ 일반적으로 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, 표본의 크기 n의 값이 충분히 크면 X는 평균이 np, 분산이 npq $(q=1-p)$인 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다는 사실이 알려져 있다.

n의 값이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $np\ge5$이고 $nq\ge5$일 때를 뜻한다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **이항분포와 정규분포의 관계**
확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n의 값이 충분히 크면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다. $(q=1-p)$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n의 값이 커짐에 따라 그래프의 모양이 정규분포곡선에 가까워지는 것을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 확인해 보도록 한다.

n의 값이 커짐에 따라 정규분포의 확률밀도함수의 그래프와 같은 좌우대칭인 종 모양의 곡선이 된다.

본문 해설

❶ 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n의 값이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따름을 그래프를 통하여 직관적으로 이해한다.

❷ 이항분포에서 시행 횟수 n이 아주 큰 수이면 어떤 사건이 일어날 확률을 구하는 것이 쉽지 않다.
이를테면 주사위를 720번 던질 때, 6의 눈이 94번 이상 135번 이하로 나올 확률, 즉 $\sum_{x=94}^{135} {}_{720}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{720-x}$을 구하는 것은 매우 어려운 일이다.
이와 같은 경우 정규분포를 이용하여 그 근삿값을 구할 수 있다.
또 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$라고 하면 충분히 큰 n에 대하여 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 보통 n이 $np\ge5$ 또는 $nq\ge5$를 만족할 때, n을 충분히 큰 값으로 생각한다.

8

목표| 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 사과 600개를 조사하였을 때 최고 등급으로 분류되는 사과의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(600,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=600\times\frac{3}{5}=360$$

$$\mathrm{V}(X)=600\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=144$$

이때 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 12^2)$에 가까워지므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 378)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-360}{12}\ge\frac{378-360}{12}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=\mathbf{0.0668}\end{aligned}$$

교과서 130 쪽

예제 05 한 개의 동전을 100번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수가 56번 이상 60번 이하일 확률을 구하여라.

풀이 한 개의 동전을 100번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50$$

$$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$$

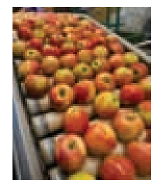
이때 $n=100$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$에 가까워진다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(56\le X\le 60)&=\mathrm{P}\left(\frac{56-50}{5}\le\frac{X-50}{5}\le\frac{60-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(1.2\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)\\&=0.4772-0.3849=0.0923\end{aligned}$$

$n=100$, $p=\frac{1}{2}$에서 $np=50\ge 5$, $nq=50\ge 5$ 이므로 n의 값은 충분히 크다고 할 수 있다.

답 0.0923

문제 8 어느 과수원에서 생산되는 사과 중에서 최고 등급으로 분류되는 사과의 비율이 60 %라고 한다. 이 과수원에서 생산되는 사과 600개를 대상으로 등급을 조사하였을 때, 최고 등급으로 분류되는 사과의 수가 378개 이상일 확률을 구하여라.



단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

타율이 2할 5푼인 타자란 많은 타석 중에서 안타를 친 횟수의 평균이 2할 5푼인 타자를 말한다. 따라서 이 타자가 4번째 타석에서 안타를 칠 확률은 앞선 타석과 마찬가지로 여전히 $\frac{1}{4}$이다.

그렇다면 타율이 2할 5푼인 타자가 48번의 타석에서 안타를 15번 이상 칠 확률을 구하여라.

단원 과제

|목표| 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 48번의 타석에서 안타를 친 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=48\times\frac{1}{4}=12$$

$$\mathrm{V}(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$$

이때 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$에 가까워지므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 15)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-12}{3}\ge\frac{15-12}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=\mathbf{0.1587}\end{aligned}$$

읽/기/자/료 관찰오차의 이론 – 가우스 곡선

1800년대는 천문학, 측량학 등이 발달한 시기였다. 그 당시 유럽의 여러 나라에서는 각 국가의 넓이, 도시 사이의 거리 등 대규모 측량이 실시되었다. 여기서 동일 대상을 반복하여 측정할 때마다 결과가 다소 다르다는 것을 알게 되었는데, 이와 같은 경험에 의해서 '관찰오차의 이론'이 탄생되었다.

독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F. ; 1777∼1855)는 관찰오차의 이론의 선구자 중의 한 사람이다. 그는 관찰오차를 제거하는 방법과 계측 대상의 실제 값을 일부를 가지고 전체를 미루어 계산하는 방법을 전개하였다. 이것은 대량 관찰에 있어서 계통적 인자와 우연적 인자를 명확하게 분리하는 최초의 시도였다.

가우스는 오차의 이론에서 출발하여, 정규곡선이 지니고 있는 실용적 가치를 밝혔다. 즉, 정규곡선의 측정값의 분포라든가 과학적 관찰에 수반되는 오차에 대하여 어떻게 잘 적합하는지를 보이고, 그 평균값, 확률오차 등의 기본적인 계산 방법을 고찰하였다. 그러므로 정규분포곡선을 가우스 곡선이라고 부르기도 한다.

교과서 131 쪽

중단원 기초

[해답 p.176]

수준별 학습

1 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 기댓값과 표준편차를 구하여라.

X	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	1

01 확률변수와 확률분포
이산확률변수의 기댓값과 표준편차

2 확률변수 X가 다음 이항분포를 따를 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{4}\right)$ (2) $\mathrm{B}\left(30,\ \frac{1}{6}\right)$

02 이항분포
이항분포의 평균과 표준편차

3 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{2}x\ (0\le x\le 2)$$

일 때, 확률 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$을 구하여라.

03 정규분포
확률밀도함수

4 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(46,\ 5^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(X\ge 56)$을 구하여라.

03 정규분포
표준정규분포

5 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(20\le X\le 26)$을 구하여라.

03 정규분포
이항분포와 정규분포의 관계

중/단/원 기초

1

목표| 이산확률변수의 기댓값과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{12}+5\times\frac{1}{3}+7\times\frac{5}{12}=\mathbf{5}$

$\mathrm{V}(X)$

$=(1-5)^2\times\frac{1}{6}+(3-5)^2\times\frac{1}{12}+(5-5)^2\times\frac{1}{3}+(7-5)^2\times\frac{5}{12}$

$=\frac{14}{3}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{14}{3}}=\mathbf{\frac{\sqrt{42}}{3}}$

2

목표| 이항분포의 평균과 분산 및 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{4}=\mathbf{25}$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\mathbf{\frac{75}{4}}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{75}{4}}=\mathbf{\frac{5\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\mathrm{E}(X)=30\times\frac{1}{6}=\mathbf{5}$

$\mathrm{V}(X)=30\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\mathbf{\frac{25}{6}}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{25}{6}}=\mathbf{\frac{5\sqrt{6}}{6}}$

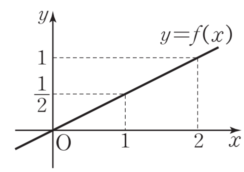
3

목표| 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}$

$=\mathbf{\frac{1}{4}}$



4

목표| 표준화를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{P}(X\ge 56)=\mathrm{P}\left(\frac{X-46}{5}\ge\frac{56-46}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=\mathbf{0.0228}$

5

목표| 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

이때 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$에 가까워지므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(20\le X\le 26)=\mathrm{P}\left(\frac{20-20}{4}\le\frac{X-20}{4}\le\frac{26-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=\mathbf{0.4332}$

중/단/원 기본

1

목표| 확률질량함수의 성질을 이해하고, 이를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$4k$	$9k$	$16k$	1

$k+4k+9k+16k=1$이므로 $k=\dfrac{1}{30}$

$$\mathrm{P}(X\ge 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$$
$$=\frac{9}{30}+\frac{16}{30}=\mathbf{\frac{5}{6}}$$

2

목표| 확률변수 $aX+b$의 평균을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=3+4=7$$
$$\mathrm{E}(2X^2+3)=2\mathrm{E}(X^2)+3$$
$$=2\times 7+3=\mathbf{17}$$

교과서 132 쪽

중단원 기본

[해답 p.176]

수준별 학습

1 확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)=kx^2\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$일 때, 확률 $\mathrm{P}(X\ge 3)$을 구하여라.

01 확률변수와 확률분포
확률질량함수

2 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{V}(X)=3$일 때, $\mathrm{E}(2X^2+3)$의 값을 구하여라.

01 확률변수와 확률분포
확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차

3 두 개의 동전을 동시에 10번 던져서 두 개의 동전 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균을 구하여라.

02 이항분포
이항분포의 평균과 표준편차

4 어느 고등학교 학생들의 통학 시간은 평균이 32분, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 학생 중 한 명을 선택했을 때, 통학 시간이 40분 이상일 확률을 구하여라.

03 정규분포
표준정규분포

5 한 개의 주사위를 720번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(X\ge 125)$를 구하여라.

03 정규분포
이항분포와 정규분포의 관계

3

목표| 이항분포의 평균을 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 두 개의 동전 모두 앞면이 나올 확률은 $\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=10\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

4

목표| 표준화를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 학생들의 통학 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 10^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\ge 40)=\mathrm{P}\left(\frac{X-32}{10}\ge\frac{40-32}{10}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0.8)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)$$
$$=0.5-0.2881$$
$$=\mathbf{0.2119}$$

5

목표| 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=720\times\frac{1}{6}=120$$
$$\mathrm{V}(X)=720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=100$$

이때 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$에 가까워지므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\ge 125)=\mathrm{P}\left(\frac{X-120}{10}\ge\frac{125-120}{10}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.5-0.1915$$
$$=\mathbf{0.3085}$$

[해답 p.176]

중단원 실력

수준별 학습

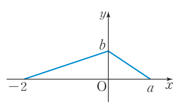
1 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, $a\ge b$이면 2점을 얻고 $a<b$이면 4점을 잃는 게임을 하려고 한다. 주사위를 던지기 전에 기본 점수는 50점이고, 두 개의 주사위 A, B를 동시에 10번 던진 후의 점수를 확률변수 X라고 할 때, X의 표준편차를 구하여라.

01 확률변수와 확률분포 — 확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차

2 한 개의 주사위를 5번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수가 X이면 상금으로 13^X원을 받는 게임에서 상금의 기댓값을 구하여라.

02 이항분포 — 이항분포의 평균과 표준편차

3 두 양수 a, b에 대하여 $-2\le x\le a$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $\mathrm{P}\left(\frac{a}{2}\le X\le a\right)=\frac{b}{8}$일 때, 확률 $\mathrm{P}(0\le X\le a)$를 구하여라.



03 정규분포 — 확률밀도함수

4 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때,

$$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=0.6826$$
$$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=0.9544$$
$$\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m+3\sigma)=0.9974$$

이다. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 위의 사실을 이용하여 확률 $\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)+\mathrm{P}(1\le Z\le 3)$을 구하여라.

03 정규분포 — 표준정규분포

5 자유투 성공률이 80 %인 농구 선수가 100번의 자유투에서 성공한 횟수가 k번 이하일 확률이 0.1587이라고 한다. 이때 오른쪽 표준정규분포를 이용하여 실수 k의 값을 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332

03 정규분포 — 이항분포와 정규분포의 관계

중/단/원 실력

1

목표| 확률변수 $aX+b$의 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| $a\ge b$일 확률, 즉 2점을 얻을 확률은 $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던지는 시행을 10번 했을 때, 2점을 얻은 횟수를 확률변수 Y라고 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{7}{12}\right)$을 따른다.

$X=50+2Y-4(10-Y)=6Y+10$이므로 $\sigma(X)=6\sigma(Y)$

이때 $\sigma(Y)=\frac{5\sqrt{14}}{12}$이므로 $\sigma(X)=6\times\frac{5\sqrt{14}}{12}=\mathbf{\frac{5\sqrt{14}}{2}}$

2

목표| 이항분포의 평균을 활용하여 상금의 기댓값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 한 개의 주사위를 5번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{E}(13^X)=\sum_{r=0}^{5}13^r\cdot{}_5\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{5-r}$$
$$=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r\left(\frac{13}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{5-r}$$
$$=\left(\frac{13}{6}+\frac{5}{6}\right)^5=3^5=\mathbf{243}$$

3

목표| 확률밀도함수의 성질을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{P}(-2\le X\le a)=\frac{1}{2}\times(a+2)\times b=1$

이므로 $ab+2b=2$ ······ ①

또 $\mathrm{P}\left(\frac{a}{2}\le X\le a\right)=\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{b}{2}=\frac{b}{8}$에서

$a=1$이므로 ①에 대입하면 $b=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(0\le X\le a)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

4

목표| 표준화를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$,

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.4987$

$\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)+\mathrm{P}(1\le Z\le 3)$

$=(0.4772-0.3413)+(0.4987-0.3413)=\mathbf{0.2933}$

5

목표| 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 100번의 자유투에서 성공한 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.8)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=80$, $\mathrm{V}(X)=16$

이때 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$에 가까워지므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-80}{4}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(\frac{k-80}{4}\le Z\le 0\right)$$
$$=0.1587$$

$\mathrm{P}\left(\frac{k-80}{4}\le Z\le 0\right)=0.3413$이고

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)=0.3413$이므로 $k=\mathbf{76}$

2 통계적 추정

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 모집단과 표본의 뜻을 알고, 표본평균과 모평균의 관계를 이해하게 한다.

② 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다.

③ 표본비율과 모비율의 관계를 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 모집단과 표본	모집단과 표본
	모평균과 표본평균의 관계
02 모평균의 추정	모평균의 추정
03 모비율의 추정	모비율과 표본비율의 관계
	모비율의 추정
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 134 쪽

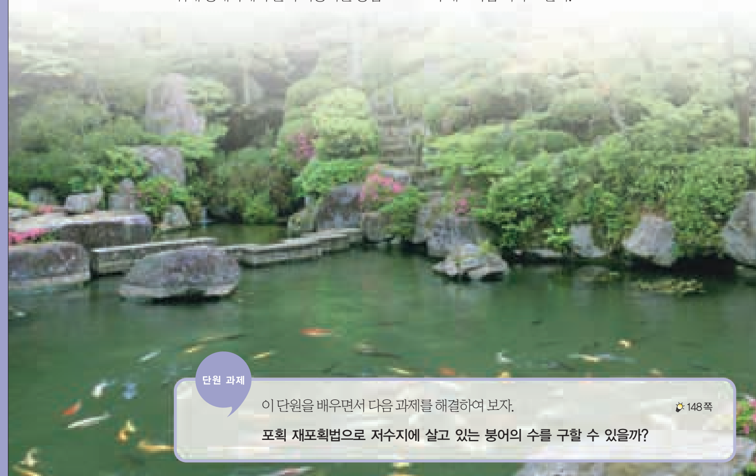
2 통계적 추정

저수지에 살고 있는 붕어의 수는 모두 몇 마리일까?

저수지에 살고 있는 붕어의 수나 지리산에 살고 있는 노루의 수와 같이 넓은 지역에 살고 있는 동물의 수를 정확히 아는 것은 매우 힘들다. 이러한 경우 다음과 같은 방법으로 그 지역에 사는 동물의 수를 추정할 수 있다.

먼저 적당한 수의 대상 동물을 포획하고 표지를 단 다음 풀어 준다. 시간이 흐른 후 다시 적당한 수의 대상 동물을 포획하여 표지를 달고 있는 동물의 수를 조사한다. 이때 표지를 달고 있는 동물들이 무리 중에 골고루 분포되어 있다고 가정하면, 다시 잡은 동물 중 표지를 달고 있는 동물의 비율이 전체 동물 중 표지를 달고 있는 동물의 비율과 같다고 볼 수 있다.

이 방법은 조사 지역에서 연구 대상 개체군을 모두 조사할 수 없을 때 개체군의 크기를 알아내기 위해 생태학에서 흔히 사용하는 방법으로 '포획 재포획법'이라고 한다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 148 쪽

포획 재포획법으로 저수지에 살고 있는 붕어의 수를 구할 수 있을까?

들어가면서 통계 자료를 이용하여 여러 가지 현상을 해석하는 일은 통계에서 가장 중요한 일이라 할 수 있다.
관심이 되는 모집단 전체에 대한 어떤 조사가 불가능한 경우 표본을 뽑아 조사하고 이를 토대로 전체 모집단의 성향을 파악하는 것이 필요하다. 일반적으로 표본을 이용하여 모평균, 모비율 등과 같은 모집단의 어떤 미지의 값을 추측하는 과정을 추정이라고 한다.
이 단원에서는 표본평균과 표본비율의 분포를 학습하고 이를 이용하여 모평균과 모비율을 추정하는 방법과 이에 대한 신뢰도에 대하여 학습하게 된다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 모집단과 표본의 뜻을 알고, 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.	상	표본평균과 모평균, 표본분산과 모분산의 관계를 이해하여 이와 관련한 문제를 해결할 수 있다.
	중	표본평균의 평균, 분산, 표준편차를 구할 수 있다.
	하	모집단과 표본, 표본의 크기의 뜻을 말할 수 있다.
2. 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.	상	표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 과정을 이해하여 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석하고 다양한 문제를 해결할 수 있다.
	중	표본평균을 이용하여 모평균을 추정할 수 있다.
	하	신뢰도, 신뢰구간의 뜻을 말할 수 있다.
3. 표본비율과 모비율의 관계를 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.	상	표본비율을 이용하여 모비율을 추정하는 과정을 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.
	중	표본비율을 이용하여 모비율을 추정할 수 있다.
	하	표본비율과 모비율의 관계를 말할 수 있다.

교과서 135 쪽

01 모집단과 표본

● 모집단과 표본의 뜻을 알고, 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.

모집단과 표본이란 무엇인가?

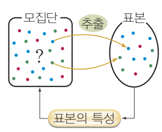
탐구 활동 투표소에서 투표를 마치고 나오는 유권자를 상대로 어느 후보를 선택하였는지 알아보는 것을 '출구조사'라고 한다. 국회의원 선거에서 투표를 한 사람을 대상으로 출구조사를 하려고 한다. 투표를 한 사람이 모두 50000명이라고 할 때, 다음 두 가지 조사 방법의 장점과 단점을 말하여 보자.

1. 투표한 사람 전체를 대상으로 한 출구조사
2. 투표한 사람 중에서 임의로 선택한 2000명을 대상으로 한 출구조사

국회의원 선거에서 투표가 모두 종료되고 난 후에는 당선자를 정확히 가려야 하므로 투표용지를 모두 개표하여 조사한다. 이와 같이 조사 대상이 되는 자료 전체를 조사하는 것을 **전수조사**라고 한다.

❶ 한편 출구조사와 같이 투표가 모두 종료되기 전에 투표를 한 사람 중에 일부를 뽑아 조사하여 당선자를 예측하기도 하는데, 이와 같이 조사하고자 하는 자료로부터 일부 대상을 뽑아 그 성질을 조사하고, 그 결과로부터 자료 전체의 성질을 추측하는 것을 **표본조사**라고 한다.

통계 조사에서 조사 대상이 되는 집단 전체를 **모집단**이라 하고, 모집단에서 뽑은 자료 일부를 **표본**이라고 한다. 또 모집단과 표본에 포함되어 있는 자료의 개수를 각각 모집단의 크기, 표본의 크기라고 한다. 그리고 모집단에서 표본을 뽑는 것을 추출이라고 한다.



보기 어느 고등학교에서 확률과 통계 2회고사 점수의 평균을 알기 위하여 모든 학생의 점수를 조사하는 것은 전수조사이고, 임의로 50명의 학생을 뽑아 조사하는 것은 표본조사이다. 이때 모집단은 모든 학생의 점수이고, 표본은 임의로 뽑은 50명의 학생의 점수이다.

문제 1 어느 조사 기관에서 우리나라 고등학생의 수면 시간을 알아보기 위하여 임의로 3000명을 뽑아 조사하였다. 이 조사가 어떤 조사 방법인지 말하고, 모집단과 표본을 말하여라.

01 모집단과 표본

소단원 지도 목표

① 전수조사와 표본조사의 뜻을 알게 한다.
② 모집단과 표본의 뜻을 알게 한다.
③ 임의추출의 뜻을 알고, 그 방법을 이해하게 한다.
④ 모평균과 표본평균의 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 표본조사의 필요성을 파악할 수 있도록 지도한다.

2. 임의추출의 의미를 이해하게 하고, 임의추출의 필요성과 그 방법을 유의하여 지도한다.

3. 표본평균과 모평균을 간단한 예를 통해서 객관적으로 이해하게 한다.

4. 표본평균의 평균, 표준편차와 표본의 평균, 표준편차를 혼동하지 않도록 유의하여 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

- 모집단(母集團, population)
- 표본(標本, sample)
- 전수조사(全數調査, total inspection)
- 표본조사(標本調査, sample survey)
- 임의추출(任意抽出, random sampling)
- 모평균(母平均, population mean)
- 모분산(母分散, population variance)
- 모표준편차(母標準偏差, population standard deviation)
- 표본평균(標本平均, sample mean)
- 표본분산(標本分散, sample variance)
- 표본표준편차(標本標準偏差, sample standard deviation)
- $\overline{X}$, S^2, S

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 조사 대상이 되는 집단 전체를 조사하는 경우와 조사 대상의 일부를 조사하는 경우의 장점과 단점을 알게 하고 그 의미를 이해하게 한다.

1. 장점 : 정확한 결과를 알 수 있다.
단점 : 비용과 시간이 많이 든다.

2. 장점 : 적은 비용으로 신속히 결과를 예측할 수 있다.
단점 : 추출되는 표본에 따라 실제 결과와 예측이 달라질 수 있다.

본문 해설

❶ 표본조사의 대표적인 예로는 품질검사, 여론조사 등이 있다. 표본조사의 장점은 경제성, 신속성 등이 있고, 단점으로는 모집단을 제대로 대표하지 못하는 표본을 사용할 경우 잘못된 통계를 초래하고 세부항목에 대한 특성을 잘 알 수 없다는 것이다.

1

목표| 모집단과 표본의 뜻을 알게 한다.

풀이| 전체 고등학생 중 일부를 뽑아 조사하였으므로 표본조사이다. 또 모집단은 조사 대상 전체인 우리나라 고등학생이며 표본은 조사하기 위해 임의로 뽑은 3000명의 고등학생이다.

교과서 136 쪽

표본조사의 목적은 모집단 전체를 조사하지 않고 그 일부인 표본을 조사하여 얻은 정보를 바탕으로 모집단의 특성을 추측하는 데 있다. 따라서 모집단의 특성을 잘 나타내도록 모집단의 어느 한 부분에 편중되지 않게 표본을 추출하여야 한다.

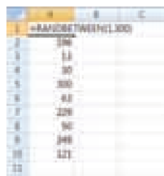
❶ 모집단에서 표본을 추출하는 여러 가지 방법 중에서 모집단의 각 원소를 같은 확률로 추출하는 것을 **임의추출**이라 하고, 임의추출된 표본을 임의표본이라고 한다.

- 특별한 언급이 없으면 표본은 임의표본을 뜻한다.

모집단에서 표본을 임의추출하는 방법으로는 제비뽑기, 난수 주사위 사용하기, 난수표 사용하기 등이 있다. 그러나 공학 도구가 발전된 요즈음에는 계산기, 컴퓨터 프로그램을 많이 사용한다.

- 난수 주사위란 각 면에 0에서 9까지의 숫자를 2번씩 써넣은 정이십면체 모양의 주사위이다.

보기 어느 공연장에 입장한 300명의 관객 중에서 10명을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 임의추출할 수 있다.
① A1 셀에 '=RANDBETWEEN(1, 300)'을 입력한다.
② A1 셀에서 채우기 핸들을 이용하여 A10 셀까지 드래그하면 10개의 난수를 얻는다.



- '=RANDBETWEEN(a, b)'는 a와 b 사이의 난수를 반환하는 함수이다.

문제 2 자신이 속한 반 학생들 중에서 5명을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 임의추출하여라.

한편 모집단에서 표본을 추출할 때, 한 개의 자료를 추출한 후 다시 되돌려 놓고 추출하는 것을 복원추출이라 하고 다시 되돌려 놓지 않고 계속 추출하는 것을 비복원추출이라고 한다.

- 모집단의 크기가 충분히 큰 경우에는 비복원추출도 복원추출로 볼 수 있다.

보기 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 표본의 크기가 3인 표본을 임의추출하는 경우의 수는
(1) 복원추출일 때: ${}_{10}\Pi_3=10^3=1000$
(2) 비복원추출일 때: ${}_{10}P_3=10\times9\times8=720$

문제 3 어느 학급의 학생 30명 중에서 2명을 뽑을 때, 다음과 같은 방법으로 임의추출하는 경우의 수를 구하여라.
(1) 복원추출 (2) 비복원추출

교과서 137 쪽

모평균과 표본평균은 어떤 관계가 있는가?

탐구 활동 다음 표는 어느 반 학생 20명의 수학 점수를 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
점수	65	87	57	92	36	42	78	82	70	45
번호	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
점수	26	68	54	70	88	76	96	32	30	60

1. 학생 20명의 수학 점수의 평균을 구하여 보자.
2. 5명, 10명을 임의추출한 다음 두 경우의 수학 점수의 평균을 각각 구하여 보자.
3. 1, 2에서 구한 수학 점수의 평균을 비교하여 보자.

어떤 모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X라고 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**라 하고, 각각 기호로 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

한편 어떤 모집단에서 크기가 n인 표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 임의추출하였을 때, 이 표본의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**라 하고, 각각 기호로 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$
$$S^2=\frac{1}{n-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$$
$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$
$$S=\sqrt{S^2}$$

- 표본분산과 모분산의 차이를 줄이기 위하여 편차의 제곱의 합을 $n-1$로 나눈다.

탐구 활동에서 임의추출한 5명의 점수가 57, 92, 78, 68, 30이라고 하면 표본평균은 65이고 표본분산은 549, 표본표준편차는 $3\sqrt{61}$이다.

모집단은 변하지 않으므로 모평균도 변하지 않지만 표본평균 $\overline{X}$는 추출된 표본에 따라 다른 값을 가지므로 확률변수이다. 따라서 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 이용하면 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.

본문 해설

❶ 모집단에서 표본을 추출하는 경우 표본을 임의추출법으로 추출해야 한다. 한편 임의추출이 아닌 추출 방법을 유의추출이라고 한다. 유의추출은 조사자가 자기의 지식과 경험에 입각하여 가장 대표적이라고 생각되는 것을 골라서 뽑는 방법으로 객관성이 결여되며, 표본과 모집단의 관계를 이론화할 수 없다.

2

목표| 컴퓨터 프로그램을 이용하여 임의추출을 할 수 있게 한다.

풀이| 예 반 학생이 40명이라고 하자.
① A1 셀에 '=RANDBETWEEN(1, 40)'을 입력한다.
② A1 셀의 내용을 채우기 핸들을 이용하여 A5 셀까지 입력하여 5개의 난수를 발생시킨다.

3

목표| 복원추출과 비복원추출의 뜻을 알고, 각각의 경우의 수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) ${}_{30}\Pi_2=30^2=\mathbf{900}$ (2) ${}_{10}P_2=30\times29=\mathbf{870}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 모평균은 변하지 않지만 표본평균은 추출된 표본에 따라 달라진다는 것을 알게 한다.

1. 62.7
2. 임의추출한 5명의 번호가 3, 6, 9, 10, 18이라면 평균은 49.2이다.
또 임의추출한 10명의 번호가 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18이라면 평균은 59.7이다.
3. **1**에서 구한 모평균은 변하지 않지만 **2**에서 구한 표본평균은 어떤 표본이 뽑히는가에 따라 달라진다.
특히 표본의 크기가 클수록 모평균에 가까운 값이 나올 가능성이 크다.

교과서 138 쪽

모집단은 이 세 개의 공이 된다.

예를 들어 1, 3, 5의 숫자가 각각 적힌 세 개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 하자. 이때 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

따라서 모평균, 모분산, 모표준편차는 각각

$$m=\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3}=3$$

$$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=(1-3)^2\times\frac{1}{3}+(3-3)^2\times\frac{1}{3}+(5-3)^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

$$\sigma=\sigma(X)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

이다.

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원추출할 때, 공에 적힌 숫자를 각각 X_1, X_2라고 하면 표본평균 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$는 다음 표에서 알 수 있는 바와 같이 추출된 표본에 따라 값이 변하는 확률변수이다.

이때 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

따라서 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차는

$$\mathrm{E}(\overline{X})=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{3}{9}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{1}{9}=3$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=(1-3)^2\times\frac{1}{9}+(2-3)^2\times\frac{2}{9}+(3-3)^2\times\frac{3}{9}+(4-3)^2\times\frac{2}{9}+(5-3)^2\times\frac{1}{9}=\frac{4}{3}$$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이다.

이 값을 모평균, 모분산, 모표준편차와 비교하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=3=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{3}=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

임을 알 수 있다.

교과서 139 쪽

일반적으로 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

❶ **표본평균의 평균, 분산, 표준편차**

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

가 성립한다.

보기 모평균이 120이고 모표준편차가 5인 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차는 각각

$$\mathrm{E}(\overline{X})=12,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{25}{9},\ \sigma(\overline{X})=\frac{5}{3}$$

이다.

문제 4 모평균이 150이고 모표준편차가 8인 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하여라.

한편 모집단의 평균이 m이고 분산이 σ^2인 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르면, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 평균이 m이고 분산이 $\frac{\sigma^2}{n}$인 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따름이 알려져 있다.

일반적으로 표본평균 $\overline{X}$의 분포에 대하여 다음이 성립한다.

❷ **표본평균의 분포**

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, $\overline{X}$는 표본의 크기 n의 값에 관계없이 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(2) 모집단이 정규분포를 따르지 않아도 표본의 크기 n의 값이 충분히 크면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

n의 값이 30 이상이면 충분히 큰 표본으로 생각한다.

참고 표본평균 $\overline{X}$의 분포가 정규분포를 따른다는 것을 확인할 수 있는 웹사이트
http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html

본문 해설

❶ 일반적으로 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n의 평균인 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은 다음과 같다.

(1) $$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i)$$
$$=\frac{1}{n}(n\times m)\leftarrow \mathrm{E}(X_i)=m$$
$$=m$$

(2) $$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i)\leftarrow X_i\text{는 서로 독립}$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2\leftarrow \mathrm{V}(X_i)=\sigma^2$$
$$=\frac{\sigma^2}{n}$$

4

목표 | 모평균과 모표준편차가 주어졌을 때, 표본평균의 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이 | $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathbf{150}$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{8}{\sqrt{25}}=\mathbf{\frac{8}{5}}$$

본문 해설

❷ 모집단이 정규분포를 따르면 표본평균의 분포는 정규분포를 따르고, 모집단이 정규분포를 따르지 않더라도 표본의 크기 n의 값이 충분히 크면 표본평균은 모평균을 평균으로 하고 모분산의 $\frac{1}{n}$을 분산으로 하는 정규분포를 따른다.

5

목표| 모집단이 정규분포를 따를 때, 표본평균의 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따르므로 크기가 25인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 2^2)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(116\le\overline{X}\le125)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{116-120}{2}\le Z\le\frac{125-120}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le2.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2)+\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.4772+0.4938\\&=\mathbf{0.9710}\end{aligned}$$

6

목표| 표본평균의 확률분포를 이용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 한 상자에 담겨 있는 곶감 25개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(58,\ 2^2)$을 따른다.
곶감 25개의 무게가 1.5 kg 이상이려면
$\overline{X}\ge\dfrac{1500}{25}=60$이어야 하므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge60)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{60-58}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

따라서 최상품의 비율은 **15.87 %**이다.

교과서 140 쪽

예제 01 어느 지역의 가구 당 통신비는 평균이 15만 원, 표준편차가 4만 원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역에서 임의추출한 100가구의 통신비의 평균이 16만 원 이상일 확률을 구하여라.

풀이 모집단의 통신비는 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 4^2)$을 따르므로 이 지역에서 임의추출한 100가구의 통신비의 평균을 $\overline{X}$라고 하면, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(15,\ \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)$을 따른다.
따라서 $\overline{X}$가 16만 원 이상일 확률은

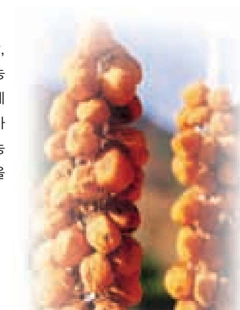
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge16)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{16-15}{\frac{2}{5}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge2.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.5-0.4938\\&=0.0062\end{aligned}$$

답 0.0062

문제 5 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따르는 어떤 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 확률 $\mathrm{P}(116\le\overline{X}\le125)$를 구하여라.

실생활

문제 6 어느 농가에서 생산하는 곶감의 무게는 평균이 58 g, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농가에서는 곶감 25개를 한 상자로 만들어 판매하는데 곶감 상자 안에 들어 있는 곶감 전체의 무게가 1.5 kg 이상이면 최상품으로 판매한다고 한다. 이 농가에서 판매하는 곶감 상자 중에서 최상품의 비율을 구하여라.



지/도/자/료 중심극한정리(Central Limit Theorem)

확률변수 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$에 대하여 제n항까지의 합의 분포가 n이 한없이 커질 때, 정규분포에 가까워지는 것을 보이는 정리로 가장 기초적인 것은 이항분포의 정규조사에 관한 라플라스의 정리이다. 즉, 중심극한정리는 독립 확률변수들의 합이 근사적으로 정규분포를 따른다는 것이다. 중심극한정리 일반적인 기술은 다음과 같다.
확률변수 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$이 서로 독립이고 각각의 확률변수에 대한 평균이 m, 분산이 σ^2인 분포를 따를 때,
$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 을 표준화하면 $Z=\dfrac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}$ 이고,
이 분포는 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다. 즉,

$$Z=\frac{S_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}=\frac{n\left(\frac{1}{n}S_n-m\right)}{\sigma\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

이므로 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.
따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

교과서 141 쪽

02 모평균의 추정

● 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

모평균은 어떻게 추정하는가?

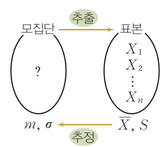
생각 열기

탐구 활동

우리나라 전체 고등학교 2학년 여학생의 평균 키를 알아보기 위하여 고등학교 2학년 여학생 300명의 키를 조사한 결과 표본평균은 160.8 cm이고 표본표준편차는 2 cm이었다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 우리나라 전체 고등학교 2학년 여학생의 평균 키는 얼마라고 추측할 수 있는지 말하여 보자.
2. 1에서 추측한 값이 모평균과 같다고 할 수 있는지 말하여 보자.

탐구 활동에서와 같이 모집단의 평균, 표준편차와 같은 모집단의 특성을 알지 못할 때, 모집단에서 추출한 표본으로부터 얻은 정보를 이용하여 모집단의 특성을 나타내는 값을 확률적으로 추측하는 것을 **추정**이라고 한다.



이제 표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 방법에 대하여 알아보자.

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 임의추출하였을 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르므로 $\overline{X}$를 표준화한 확률변수

$$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

새로 나온 용어와 기호

- 추정(推定, estimation)
- 신뢰도(信頼度, confidence coefficient)
- 신뢰구간(信頼區間, confidence interval)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 표본평균으로 모평균을 추정해 봄으로써 모집단의 특성을 알지 못할 때 표본의 정보를 이용할 수 있음을 알게 한다.

1. 고등학교 2학년 여학생 300명의 키의 평균이 160.8 cm이므로 우리나라 전체 고등학교 2학년 여학생의 평균 키는 **160.8 cm**라고 추측할 수 있다.

2. 표본이 달라지면 표본평균도 달라질 것이기 때문에 추측한 값이 모평균과 같다고는 할 수는 없다. 그러나 추측한 값이 모평균에 가까울 것이라는 기대는 할 수 있다.

본문 해설

❶ $\mathrm{P}\left(-2.58\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 2.58\right)$

$=\mathrm{P}\left(\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.99$

따라서 모평균 m이

$\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

에 포함될 확률은 99 %이고, 이 범위를 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이라고 한다.

❷ '모평균 m이 특정 구간 $[\alpha, \beta]$ 안에 포함될 확률이 0.95이다.' 와 같은 식으로 진술하는 것은 잘못된 것이다. 모평균은 고정된 상수이므로 모평균 m은 구간 $[\alpha, \beta]$에 포함되어 있거나 포함되어 있지 않거나 둘 중의 하나이고, 각 경우 확률은 1이거나 0이기 때문이다.

따라서 $\mathrm{P}(\alpha<m<\beta)=0.95$는 잘못된 표현이고

$\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$

와 같이 확률변수 $\overline{X}$로 표현되어야 함에 유의한다.

02 모평균의 추정

소단원 지도 목표

① 모평균을 추정할 수 있게 한다.
② 모평균의 추정 결과를 해석할 수 있게 한다.
③ 신뢰도와 신뢰구간의 뜻을 알게 한다.

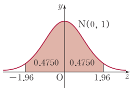
교수 · 학습상의 유의점

1. 모평균의 추정은 모집단이 정규분포인 경우만 지도한다.

2. 일반적으로 모표준편차는 알 수 없는 경우가 많으므로 표본의 크기가 충분히 크면 표본표준편차와 모표준편차가 거의 같은 것으로 보고 대신 사용할 수 있게 한다.

3. 모평균에 대한 신뢰도와 신뢰구간의 뜻을 구체적인 예를 통하여 이해하도록 지도한다.

교과서 142 쪽



이때 표준정규분포표에서

$$\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(-1.96\le \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le 1.96\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=0.95$$

이다.

따라서 모평균 m이

$$\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

에 포함될 확률은 95 %이고, 이 범위를 모평균 m의 **신뢰도** 95 %의 **신뢰구간**이라고 한다.

1 같은 방법으로 표준정규분포표에서

$$\mathrm{P}(-2.58\le Z\le 2.58)=0.99$$

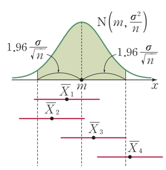
이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

임을 알 수 있다.

2 표본평균 $\overline{X}$는 모집단으로부터 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지는 확률변수이므로 이에 따라 신뢰구간도 달라진다.

예를 들어 오른쪽 그림에서 표본평균을 $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$으로 계산한 신뢰구간은 모평균 m을 포함하지만 $\overline{X}_4$로 계산한 신뢰구간은 모평균 m을 포함하지 않는다.



즉, '모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간'의 뜻은 모집단으로부터 크기가 n인 표본을 임의추출하는 일을 되풀이하여 모평균 m에 대한 신뢰구간을 만들 때, 이들 중에서 약 95 %는 모평균 m을 포함한다는 의미이다.

교과서 143 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

3 모표준편차 σ의 값을 알 수 없는 경우가 보통이므로 표본의 크기 n이 클 때$(n\ge 30)$에는 σ 대신 표본표준편차 S를 사용한다.

4 **모평균 m의 신뢰구간**

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 모평균 m의 신뢰구간은

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간: $\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간: $\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

예제 01 어느 음식점의 돼지고기 1인분의 무게는 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 음식점의 돼지고기 1인분의 무게를 25번 측정한 결과 평균이 195 g이었다고 할 때, 돼지고기 1인분의 평균 무게의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여라.

풀이 $n=25$, $\overline{X}=195$, $\sigma=10$이므로 평균 무게 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$195-1.96\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 195+1.96\frac{10}{\sqrt{25}}$$

따라서 $191.08\le m\le 198.92$이다.

답 $191.08\le m\le 198.92$

문제 1 어느 도시에서 자동차를 소유한 사람이 하루 동안 운전하는 시간은 표준편차가 30분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시에서 자동차를 소유한 사람 중 100명을 임의추출하여 조사하였더니 하루 평균 운전하는 시간이 80분이었다고 할 때, 이 도시에서 자동차를 소유한 사람이 하루 평균 운전하는 시간의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

모평균 m의 신뢰구간이 $\alpha\le m\le\beta\ (\alpha<\beta)$일 때, $\beta-\alpha$를 신뢰구간의 길이라고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

(1) 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 어떻게 변하는가?

(2) 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 어떻게 변하는가?

(3) 표준편차가 커지면 신뢰구간의 길이는 어떻게 변하는가?

본문 해설

3 모표준편차가 알려지지 않은 경우에 표본의 크기가 충분히 크면 모표준편차 대신 표본표준편차를 이용한다. 표본의 크기가 커질 때 큰 수의 법칙에 따라 표본표준편차가 모표준편차에 가까워지지 때문이다.

4 $\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (단, k는 상수)에서

$$\left(\overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$를 '신뢰구간의 길이'라고 한다.

신뢰도가 일정할 때 표본의 크기가 클수록 신뢰구간의 길이는 짧아지고, 표본의 크기가 일정할 때 신뢰도가 높을수록 신뢰구간의 길이는 길어진다.

1

목표| 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| $n=100$, $\overline{X}=80$, $\sigma=30$이므로 하루 평균 운전하는 시간 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$80-2.58\frac{30}{\sqrt{100}}\le m\le 80+2.58\frac{30}{\sqrt{100}}$$

따라서 **$72.26\le m\le 87.74$**

사고력 기르기 추론

출제 의도| 신뢰도, 표본의 크기, 표준편차와 신뢰구간의 길이 사이의 관계를 알게 한다.

풀이| (1) 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 길어진다.

(2) 같은 신뢰도로 모집단의 평균을 추정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

(3) 같은 신뢰도로 모집단의 평균을 추정할 때, 표준편차가 커지면 신뢰구간의 길이는 길어진다.

교과서 144 쪽

03 모비율의 추정

● 표본비율과 모비율의 관계를 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

모비율과 표본비율은 어떤 관계가 있는가?

생각 열기 **아침 식사**

질병관리본부가 전국 중 · 고등학생 8만 명을 대상으로 '청소년 건강 행태 온라인 조사'를 실시한 결과 24.4 %가 "최근 7일 동안 5일 이상 아침 식사를 하지 않았다."고 답하였다.

그런데 아침 식사를 거르는 습관은 학생의 학습 능력과 암기력에 좋지 않은 영향을 미친다. 농촌진흥청의 조사에 따르면 아침 식사를 하는 학생들이 하지 않는 학생들보다 성적이 더 좋았다고 한다.

탐구 활동 **다음 물음에 답하여 보자.**

1. 우리 반 학생들 중에서 최근 7일 동안 5일 이상 아침 식사를 하지 않은 학생들의 비율을 조사하여 보자.
2. 질병 관리 본부의 조사 결과와 자신이 조사한 결과를 비교하여 보고, 전국 중 · 고등학생을 모두 조사한다면 어떤 결과가 나올지 말하여 보자.

● p는 proportion(비율)의 첫 글자이고, $\hat{p}$은 'p-hat(피햇)'으로 읽는다.

후보자에 대한 지지율, TV 프로그램의 시청률, 제품의 불량률 등과 같이 모집단에서 어떤 사건에 대한 비율을 생각할 때, 그 비율을 **모비율**이라 하고 기호로 p와 같이 나타낸다.

또 모집단으로부터 임의추출한 표본에서 어떤 사건에 대한 비율을 **표본비율**이라 하고, 기호로 $\hat{p}$과 같이 나타낸다.

일반적으로 어떤 사건에 대한 표본비율은 다음과 같다.

표본비율

크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 이 사건에 대한 표본비율 $\hat{p}$은

$$\hat{p}=\frac{X}{n}$$

03 모비율의 추정

소단원 지도 목표

① 모비율과 표본비율의 뜻을 알게 한다.
② 모비율과 표본비율의 관계를 이해하게 한다.
③ 모비율을 추정할 수 있게 한다.
④ 모비율의 추정의 결과를 해석할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 모비율의 추정은 표본의 크기가 클 때만 다룬다.
2. 모비율과 표본비율의 차이를 알게 하고, 그 기호에 유의하여 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

- 모비율(母比率, population ratio)
- 표본비율(標本比率, sample rate)
- $\hat{p}$

생각 열기 참/고/자/료

한 설문조사 기관에 따르면 20～39세 1000명을 대상으로 '대한민국 20～30대 아침 식사 섭취 실태 조사'를 실시한 결과 응답자의 51.9 %가 아침 식사를 정기적으로 챙겨먹지 않는 것으로 조사되었다.
아침을 먹는 평균적인 횟수를 묻는 질문에는 '먹지 않는다'와 '주 1～2회 미만'을 선택한 응답자가 45.5 %로 나타났다. 이는 2011년 질병관리본부의 국민건강영향결과에 따른 아침 식사 평균결식률이 20.3 %로 파악된 것에 비해 청년층(20～30대)의 실제 아침 식사 결식률이 더욱 심각한 것을 의미한다.
미국 '허핑턴 포스트'의 조사 결과에 따르면 아침 식사를 제대로 챙겨 먹지 않으면 두뇌활동이 저하될 수 있고 비만 가능성이 무려 4.5배나 높아지는 것으로 나타났다. 또 각종 성인병, 당뇨병, 심장병 발병률도 증가한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 표본비율은 추출된 표본에 따라 달라진다는 것을 알고, 모비율과 표본비율 사이의 관계를 생각해 볼 수 있도록 한다.

1. 우리 반 학생 30명 중 최근 7일 동안 5일 이상 아침 식사를 하지 않은 학생이 7명이라면 표본비율은 $\frac{7}{30}$이다. 따라서 아침 식사를 하지 않은 학생들은 전체의 약 23.3 %이다.
2. 표본이 달라지면 표본비율도 달라지므로 정확한 모비율을 알 수는 없지만 전국 중 · 고등학생 8만 명을 대상으로 조사했을 때의 표본비율이 24.4 %이므로 모비율도 이 값에 가까울 것이라고 기대할 수 있다.

교과서 145 쪽

문제 1 어느 스포츠용품 판매장을 방문한 고객 중에서 200명을 임의추출하여 조사한 결과 36명이 물건을 구입하였다고 할 때, 이 매장을 방문한 고객 중에서 물건을 구입한 고객의 표본비율을 구하여라.

표본비율 $\hat{p}=\frac{X}{n}$에서 확률변수 X는 크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어나는 횟수이므로 X가 가질 수 있는 값은 $0, 1, 2, \cdots, n$이고, 모집단에서 그 사건이 일어날 확률은 p이다. 따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로 X의 평균과 분산은 각각

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq\ (q=1-p)$$

이다. 이때 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\hat{p})=\mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}\times np=p$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{n^2}\times npq=\frac{pq}{n}$$

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

표본의 크기 n의 값이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $n\hat{p}\geq5$이고 $n\hat{q}\geq5$일 때를 뜻한다.

일반적으로 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때 표본의 크기 n의 값이 충분히 크면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$ $(q=1-p)$에 가까워지므로 표본비율 $\hat{p}=\frac{X}{n}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$에 가까워진다는 것이 알려져 있다. 따라서 n의 값이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$을 표준화한 확률변수

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

표본비율 $\hat{p}$의 분포

모비율이 p이고 표본의 크기 n의 값이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$에 가까워진다. 따라서 확률변수 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$(q=1-p)$

교과서 146 쪽

예제 01 어느 지역에 사는 사람 중에서 혈액형이 B형인 사람의 비율은 25 %라고 한다. 이 지역에 사는 사람 중에서 임의추출한 300명의 혈액형을 조사하였을 때, 혈액형이 B형인 사람의 비율이 25 % 이상 30 % 이하일 확률을 구하여라.

풀이 임의추출한 300명 중에서 혈액형이 B형인 사람의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 $p=0.25$, $n=300$이므로

$$\mathrm{E}(\hat{p})=p=0.25$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{0.25\times0.75}{300}=(0.025)^2$$

$n=300$, $\hat{p}=0.25$에서 $n\hat{p}=75\geq5$, $n\hat{q}=225\geq5$이므로 n의 값은 충분히 크다고 할 수 있다.

이때 $n=300$은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0.25, (0.025)^2)$에 가까워진다. 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(0.25\leq\hat{p}\leq0.3)=\mathrm{P}\left(\frac{0.25-0.25}{0.025}\leq\frac{\hat{p}-0.25}{0.025}\leq\frac{0.3-0.25}{0.025}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)=0.4772$$

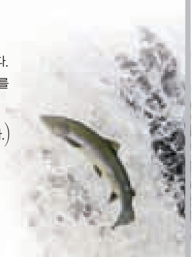
답 0.4772

문제 2 어느 고등학교 학생 중에서 비만인 학생의 비율은 20 %라고 한다. 이 학교 학생 중에서 임의추출한 100명을 조사하였을 때, 비만인 학생이 16명 이하일 확률을 구하여라.

실생활

문제 3 어느 지역에서 방류하는 연어의 회귀율은 0.2 %라고 한다. 이 지역에서 방류하는 연어 중에서 임의추출한 1000마리를 조사하였을 때, 회귀 연어가 4마리 이상일 확률을 구하여라.

$\left(\text{단, } \sqrt{0.00000196}=0.0014,\ \frac{10}{7}=1.43\text{으로 계산한다.}\right)$



창의 up

예제 1을 '이항분포와 정규분포의 관계'를 이용하여 풀고, 그 결과를 비교하여 보자.

1

목표| 표본비율을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\hat{p}=\frac{X}{n}=\frac{36}{200}=\mathbf{0.18}$

2

목표| 표준화를 이용하여 표본비율의 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 임의추출한 100명의 학생 중에서 비만인 학생의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 $p=0.2$, $n=100$이므로

$$\mathrm{E}(\hat{p})=p=0.2,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{0.2\times0.8}{100}=(0.04)^2$$

이고 표본의 크기가 충분히 크므로, 표본비율 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0.2, (0.04)^2)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}\left(\hat{p}\leq\frac{16}{100}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}\leq\frac{0.16-0.2}{0.04}\right)=\mathrm{P}(Z\leq-1)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)=0.5-0.3413$$
$$=\mathbf{0.1587}$$

3

목표| 표본비율의 확률분포를 이용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 임의추출한 1000마리 중에서 회귀 연어의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 $p=0.002$, $n=1000$이므로

$$\mathrm{E}(\hat{p})=p=0.002$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{0.002\times0.998}{1000}=(0.0014)^2$$

이고 표본의 크기가 충분히 크므로, 표본비율 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0.002, (0.0014)^2)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}\left(\hat{p}\geq\frac{4}{1000}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-0.002}{0.0014}\geq\frac{0.004-0.002}{0.0014}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\geq1.43)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.43)$$
$$=0.5-0.4236$$
$$=\mathbf{0.0764}$$

교과서 147 쪽

모비율은 어떻게 추정하는가?

표본평균을 이용하여 모평균을 추정한 것과 같이 표본비율을 이용하여 모비율을 추정할 수 있다.

모비율이 p인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하였을 때, n의 값이 충분히 크면 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$ $(q=1-p)$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

❶ 또 표본의 크기 n의 값이 충분히 클 때, $\hat{p}$의 분산 $\dfrac{pq}{n}$에서 p, q 대신에 표본비율 $\hat{p}$, $\hat{q}$ $(\hat{q}=1-\hat{p})$을 사용한 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$도 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다는 사실이 알려져 있다.

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(-1.96\le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}\le 1.96\right)\\&=\mathrm{P}\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)\\&=0.95\end{aligned}$$

이다.

따라서 모비율 p가

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

에 포함될 확률은 95 %이고, 이 범위를 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이라고 한다.

같은 방법으로 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-2.58\le Z\le 2.58)=0.99$이므로 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

임을 알 수 있다.

모평균의 신뢰구간과 마찬가지로 '모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간'의 뜻은 모집단으로부터 크기가 n인 표본을 임의추출하는 일을 되풀이하여 모비율 p에 대한 신뢰구간을 만들 때, 이들 중에서 약 95 %는 모비율 p를 포함한다는 의미이다.

본문 해설

❶ 표본비율 $\hat{p}$의 정확한 분포는 알기 어렵다. 따라서 모비율 p에 대한 구간추정을 하기 위해서는 표본의 크기 n을 충분히 크게 하여 $\hat{p}$의 근사적인 분포를 이용하여야 한다. 또 $\hat{p}$의 분산 $\dfrac{pq}{n}$를 모를 때에는 $\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}$을 사용한다. 한편 모평균의 구간추정에서와 마찬가지로 표본비율 $\hat{p}$은 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지며, 신뢰구간도 달라진다.

지/도/자/료

신뢰도는 보통 95 %를 많이 사용한다. 신뢰도는 믿을 수 있는 정도이므로 신뢰도 100 %를 사용하는 것이 바람직할 것 같은데 신뢰도 95 %를 많이 사용하는 이유에 대하여 알아보자.

신뢰도를 100 %에 가까운 99.7 %로 하면 신뢰구간은

$$\bar{x}-2.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+2.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{p}-2.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+2.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이고, 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

이다. 이때 신뢰도 99.7 %의 신뢰구간의 길이 $5.92\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 또는 $5.92\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$은 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 $3.92\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 또는 $3.92\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$의 1.5배 이상이 된다.

신뢰구간의 길이는 짧을수록 좋은데 신뢰도를 5 % 정도 높이기 위하여 신뢰구간의 길이를 50 % 이상 늘려야 하는 것은 바람직하지 못하다. 그렇다고 신뢰구간의 길이를 무작정 짧게 할 수도 없다. 그럴려면 표본의 크기가 커져야 하는데 이는 통계조사시 시간과 비용이 많이 든다. 이런 이유들로 신뢰도 95 %를 가장 많이 사용하는 것이다.

창의 UP

출제 의도| 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 문제를 해결해 봄으로써 표본비율의 확률분포를 이끌어 내는 과정을 경험하게 한다.

풀이| 임의추출한 300명 중에서 혈액형이 B형인 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(300,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=300\times\dfrac{1}{4}=75$

$\mathrm{V}(X)=300\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\left(\dfrac{15}{2}\right)^2$

이때 표본의 크기 $n=300$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \left(\dfrac{15}{2}\right)^2\right)$에 가까워진다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(75\le X\le 90)&=\mathrm{P}\left(\frac{75-75}{\frac{15}{2}}\le \frac{X-75}{\frac{15}{2}}\le \frac{90-75}{\frac{15}{2}}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772\end{aligned}$$

따라서 그 결과는 같다.

4

목표| 모비율의 신뢰구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| $n=300,\ \hat{p}=\dfrac{75}{300}=0.25$

이므로 전체 스마트폰 이용자 중에서 제조사가 B사인 사람의 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.25-2.58\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}\le p\le0.25+2.58\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}$$

따라서 $\mathbf{0.1855\le p\le0.3145}$

단원 과제

목표| 모비율의 추정을 통해 저수지에 살고 있는 붕어의 수를 추정할 수 있게 한다.

풀이| 전체 붕어 중에서 표지를 단 붕어의 모비율을 p라고 하면 $n=100,\ \hat{p}=\dfrac{20}{100}=0.2$이므로 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}\le p\le0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}$$

에서 $0.1216\le p\le0.2784$

이때 저수지에 살고 있는 전체 붕어의 수를 N이라고 하면 $0.1216\le\dfrac{50}{N}\le0.2784$에서

$179.59\cdots\le N\le411.18\cdots$

따라서 전체 붕어의 수는 180마리 이상 411마리 이하로 추정할 수 있다.

교과서 148 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

모비율 p의 신뢰구간

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, n의 값이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰구간은 $(\hat{q}=1-\hat{p})$

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간: $\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간: $\hat{p}-2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

예제 02 어느 회사의 사원 중에서 임의추출한 100명을 조사한 결과 80명이 기혼자였다고 할 때, 이 회사에서 사원의 기혼자 비율의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여라.

풀이 $n=100,\ \hat{p}=\dfrac{80}{100}=0.8$이므로 전체 사원의 기혼자 비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}\le p\le0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}$$

따라서 $0.7216\le p\le0.8784$이다.

답 $0.7216\le p\le0.8784$

문제 4 다음 표는 어느 지역의 스마트폰 이용자 중에서 임의추출한 300명의 스마트폰 제조사별 인원 수를 조사하여 나타낸 것이다. 이 지역의 전체 스마트폰 이용자 중에서 제조사가 B사인 사람의 비율의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

제조사	A	B	C	기타	합계
인원 수(명)	144	75	48	33	300

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

어느 저수지에서 50마리의 붕어를 포획하고 표지를 단 다음 풀어 주었다. 시간이 흐른 후 다시 100마리의 붕어를 잡았을 때, 이 중 표지를 달고 있는 붕어가 20마리였다고 한다. 표지를 달고 있는 붕어가 저수지에 골고루 분포되어 있다고 가정할 때, 이 저수지에 살고 있는 전체 붕어의 수를 신뢰도 95 %의 신뢰구간으로 추정하여 보자.

읽/기/자/료 학문으로서의 통계학

통계학(statistics)의 어원은 라틴어의 status(상태)에서 유래하였다. 이 status가 중세 이후 정치적인 의미로서 state(국가)를 가리키게 되었다. 따라서 '통계학(statistics)'은 원래의 의미가 국가의 상태를 조사, 연구하는 것'임을 알 수 있다. 학문으로서의 통계학의 성립은 17~18세기 계몽주의 시대에 국세학과 정치산술학으로 이루어졌다.

17~18세기 프랑스에서 발달한 확률론과 영국에서 발달한 정치산술학의 결합으로 근대통계학은 태동하였다.

벨기에의 케틀레(Quételet, L. A. J. ; 1796~1874)는 정치산술학파가 사용하는 자료에 확률론적으로 논리를 정돈하고 종합하여 근대통계학의 형태를 완성시켰다. 케틀레 이후에 근대통계학의 발전에 공헌한 사람은 유전 현상을 수학적으로 해설하는 데 성공한 골턴(Galton, F. ; 1822~1911)이었다.

피어슨(Pearson, K. ; 1857~1936)은 생물측정학, 우생학, 유전학을 통하여 통계적 연구 방법의 확립에 일생을 바쳤는데, 1901년 세계 최초의 통계학 잡지인 "Biometrika"를 골턴 등과 함께 창간하였다.

현대통계학은 피어슨의 제자인 고셋(Gosset, W. S. ; 1876~1931)에 의하여 시작되었다. 그는 피어슨이 '대량 관찰'을 토대로 연구한 것과는 달리 '소표본'인 경우에도 통계적 처리가 가능한 이론을 발표하였다. 즉, 1908년에 'Student'라는 이름으로 Biometrika에 발표한 논문 "The Probable Error of a Mean"은 현대통계학의 기초가 되었다. 고셋의 결과를 계승한 피셔(Fischer, R. A. ; 1890~1962)는 새로운 분포법칙을 유도하고 여러 가지 검정법을 고안하여 현대통계학을 완성하였다.

교과서 149 쪽

중단원 기초

[해답 p.178] 수준별 학습

1 모평균이 60이고 모표준편차가 2인 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하여라.

01 모집단과 표본
모평균과 표본평균의 관계

2 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 20^2)$을 따르는 어떤 모집단에서 임의추출한 크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 175)$를 구하여라.

01 모집단과 표본
표본평균의 분포

3 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 조사한 표본의 평균이 58일 때, 이 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여라.

02 모평균의 추정

4 모비율이 $\frac{1}{5}$인 모집단에서 임의추출한 크기가 64인 표본의 표본비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}\left(\hat{p}\le\frac{1}{4}\right)$을 구하여라.

03 모비율의 추정
표본비율의 분포

5 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 조사한 표본비율이 0.36일 때, 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

03 모비율의 추정

중/단/원 기초

1

목표| 모평균과 모표준편차가 주어졌을 때, 표본평균의 평균과 표준편차를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathbf{60}$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{36}}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

2

목표| 모집단이 정규분포를 따를 때, 표본평균의 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 20^2)$을 따르므로 크기가 25인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 4^2)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 175)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{175-170}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.25)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)\\&=0.5-0.3944\\&=\mathbf{0.1056}\end{aligned}$$

3

목표| 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| $n=100$, $\overline{X}=58$, $\sigma=5$이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$58-1.96\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 58+1.96\frac{5}{\sqrt{100}}$$

따라서 $\mathbf{57.02\le m\le 58.98}$

4

목표| 표준화를 이용하여 표본비율의 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| $p=\frac{1}{5}$, $n=64$이므로

$$\mathrm{E}(\hat{p})=p=\frac{1}{5},$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{64}=\left(\frac{1}{20}\right)^2$$

이고 표본의 크기가 충분히 크므로, 표본비율 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{1}{5},\left(\frac{1}{20}\right)^2\right)$에 가까워진다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\le\frac{1}{4}\right)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{20}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413=\mathbf{0.8413}\end{aligned}$$

5

목표| 모비율의 신뢰구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| $n=100$, $\hat{p}=0.36$이므로 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.36-2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{100}}\le p\le 0.36+2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{100}}$$

따라서 $\mathbf{0.23616\le p\le 0.48384}$

교과서 150 쪽

중단원 기본

[해답 p.179]

수준별 학습

1 어느 고등학교 2학년 학생들의 영어 듣기 점수는 평균이 68점, 표준편차가 8점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학생들 중에서 임의추출한 25명의 영어 듣기 점수의 평균이 72점 이상일 확률을 구하여라.

01 모집단과 표본
표본평균의 분포

2 어느 고등학교 학생들의 몸무게는 표준편차가 6 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학생들 중 81명을 임의추출하여 몸무게를 조사하였더니 평균이 60 kg이었다. 이 학교 전체 학생의 몸무게의 평균의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

02 모평균의 추정

3 어느 지역의 선거에서 A 후보의 지지율이 25 %이었다. 이 지역 주민 중에서 75명을 임의추출하여 조사하였을 때, A 후보의 지지율이 30 % 이상 35 % 이하일 확률을 구하여라.

03 모비율의 추정
표본비율의 분포

4 어느 회사에서 소비자가 어떤 제품을 선호하는 비율을 알아보기 위하여 제품을 구매한 소비자 중 100명을 임의추출하여 조사하였더니 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $0.1216\le p\le 0.2784$이었다. 이때 표본비율 $\hat{p}$의 값을 구하여라.

03 모비율의 추정

중/단/원 기본

1

목표| 모집단이 정규분포를 따를 때, 표본평균의 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 모집단의 영어 듣기 점수는 정규분포 $\mathrm{N}(68,\ 8^2)$을 따르므로 이 학생들 중에서 임의추출한 25명의 영어 듣기 점수의 표본평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(68,\ \left(\frac{8}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 72)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{72-68}{\frac{8}{5}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.4938\\&=\mathbf{0.0062}\end{aligned}$$

2

목표| 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| $n=81$, $\overline{X}=60$, $\sigma=6$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$60-2.58\frac{6}{\sqrt{81}}\le m\le 60+2.58\frac{6}{\sqrt{81}}$$

따라서 $\mathbf{58.28\le m\le 61.72}$

3

목표| 표준화를 이용하여 표본비율의 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 임의추출한 75명 중에서 A 후보를 지지하는 주민의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 $p=\frac{1}{4}$, $n=75$이므로

$$\mathrm{E}(\hat{p})=\frac{1}{4},\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{75}=\left(\frac{1}{20}\right)^2$$

이고 표본의 크기가 충분히 크므로, 표본비율 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{1}{4},\left(\frac{1}{20}\right)^2\right)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0.3\le\hat{p}\le 0.35)&=\mathrm{P}\left(\frac{0.3-0.25}{0.05}\le Z\le\frac{0.35-0.25}{0.05}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413\\&=\mathbf{0.1359}\end{aligned}$$

4

목표| 모비율의 신뢰구간이 주어졌을 때, 표본비율을 구할 수 있게 한다.

풀이| 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 양 끝 값은

$$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}=0.1216$$

$$\hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}=0.2784$$

위의 두 식을 더하면 $2\hat{p}=0.4$

따라서 $\hat{p}=\mathbf{0.2}$

교과서 151 쪽

중단원 실력

[해답 p.179]

수준별 학습

1 모평균이 20이고 모분산이 4인 모집단에서 크기가 8인 표본을 임의추출할 때, 그 표본의 합을 Y라고 하자. 확률변수 Y의 평균 $\mathrm{E}(Y)$와 분산 $\mathrm{V}(Y)$에 대하여 $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하여라.

01 모집단과 표본
모평균과 표본평균의 관계

2 표준편차가 0.3인 정규분포를 따르는 모집단의 평균을 99 %의 신뢰도로 추정할 때, 모평균과 표본평균의 차가 0.01 이하가 되도록 하기 위한 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.

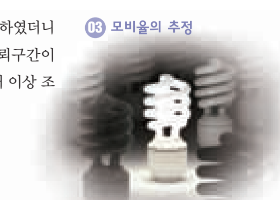
02 모평균의 추정

3 어느 해 A 고등학교 졸업생의 대학 진학률은 70 %라고 한다. 그해 A 고등학교 졸업생 중에서 임의추출한 n명의 대학 진학률을 $\hat{p}$이라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(\hat{p}\le 0.8)=0.8413$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

03 모비율의 추정
표본비율의 분포

4 어느 공장에서 생산되는 전구 중에서 100개를 임의추출하여 조사하였더니 10개가 불량품이었다. 전구의 불량률 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $\alpha\le p\le\beta\ (\alpha<\beta)$일 때, $\beta-\alpha\le 0.03$이 되도록 하려면 전구를 몇 개 이상 조사하여야 하는지 구하여라.

03 모비율의 추정



중/단/원 실력

1

목표| 모평균과 모분산이 주어졌을 때, 표본평균의 평균과 분산을 구할 수 있게 한다.

풀이| 표본평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\dfrac{Y}{8}=\overline{X}$이므로 $Y=8\overline{X}$

$\mathrm{E}(\overline{X})=20,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)&=\mathrm{E}(8\overline{X})+\mathrm{V}(8\overline{X})\\&=8\mathrm{E}(\overline{X})+64\mathrm{V}(\overline{X})\\&=160+32=\mathbf{192}\end{aligned}$$

2

목표| 모평균의 신뢰구간을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 모평균을 m, 모표준편차를 σ, 표본의 크기를 n이라고 하면

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.99$$

$$\mathrm{P}\left(-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.99$$

$$\mathrm{P}\left(|m-\overline{X}|\le 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.99$$

모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차가 0.01 이하이어야 하므로

$2.58\times\dfrac{0.3}{\sqrt{n}}\le 0.01$에서 $\sqrt{n}\ge 77.4$

$n\ge 5990.76$이므로 표본의 크기의 최솟값은 **5991**이다.

3

목표| 표본비율의 확률분포를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.7,\ \left(\sqrt{\dfrac{0.21}{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(\hat{p}\le 0.8)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.8-0.7}{\sqrt{\frac{0.21}{n}}}\right)=0.8413$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{0.1}{\sqrt{\frac{0.21}{n}}}\right)=0.3413$이고

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로 $\dfrac{0.1}{\sqrt{\frac{0.21}{n}}}=1$

$0.01=\dfrac{0.21}{n}$이므로 $n=\mathbf{21}$

4

목표| 모비율의 신뢰구간을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 전구의 불량률을 p라고 하면 $\hat{p}=\dfrac{10}{100}=0.1$

전구의 불량률을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간 $\alpha\le p\le\beta$에 대하여

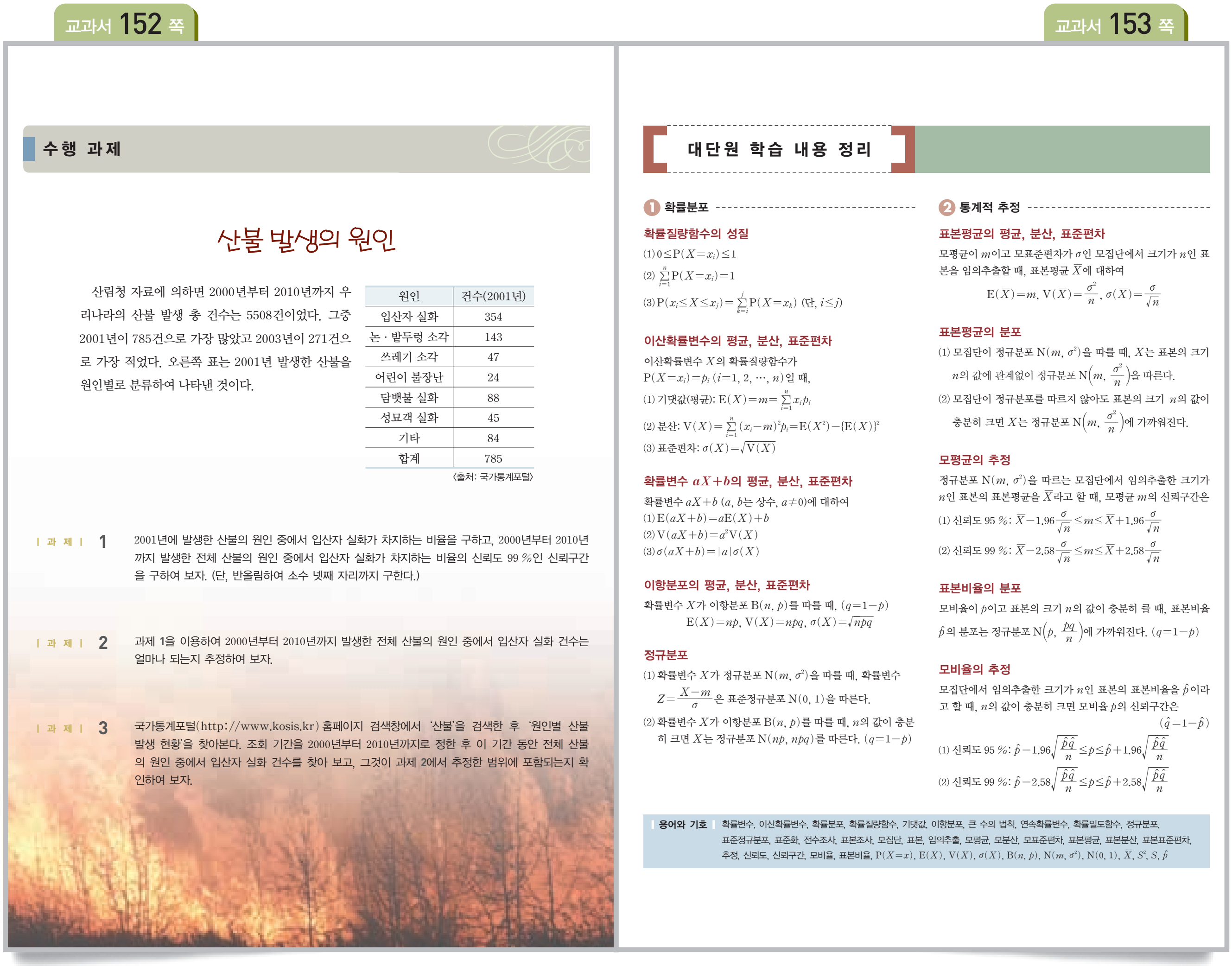
$$\beta-\alpha=2\times 2.58\times\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}}\le\frac{3}{100}$$

$\sqrt{n}\ge 51.6,\ n\ge 2662.56$

따라서 **2663**개 이상 조사하여야 한다.

교과서 152 쪽

교과서 153 쪽



수행 과제

산불 발생의 원인

산림청 자료에 의하면 2000년부터 2010년까지 우리나라의 산불 발생 총 건수는 5508건이었다. 그중 2001년이 785건으로 가장 많았고 2003년이 271건으로 가장 적었다. 오른쪽 표는 2001년 발생한 산불을 원인별로 분류하여 나타낸 것이다.

원인	건수(2001년)
입산자 실화	354
논 · 밭두렁 소각	143
쓰레기 소각	47
어린이 불장난	24
담뱃불 실화	88
성묘객 실화	45
기타	84
합계	785

〈출처: 국가통계포털〉

| 과 제 | 1 2001년에 발생한 산불의 원인 중에서 입산자 실화가 차지하는 비율을 구하고, 2000년부터 2010년까지 발생한 전체 산불의 원인 중에서 입산자 실화가 차지하는 비율의 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여 보자. (단, 반올림하여 소수 넷째 자리까지 구한다.)

| 과 제 | 2 과제 1을 이용하여 2000년부터 2010년까지 발생한 전체 산불의 원인 중에서 입산자 실화 건수는 얼마나 되는지 추정하여 보자.

| 과 제 | 3 국가통계포털(http://www.kosis.kr) 홈페이지 검색창에서 '산불'을 검색한 후 '원인별 산불 발생 현황'을 찾아본다. 조회 기간을 2000년부터 2010년까지로 정한 후 이 기간 동안 전체 산불의 원인 중에서 입산자 실화 건수를 찾아 보고, 그것이 과제 2에서 추정한 범위에 포함되는지 확인하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 확률분포

확률질량함수의 성질

(1) $0 \le \mathrm{P}(X=x_i) \le 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i)=1$

(3) $\mathrm{P}(x_i \le X \le x_j)=\sum_{k=i}^{j} \mathrm{P}(X=x_k)$ (단, $i \le j$)

이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$일 때,

(1) 기댓값(평균): $\mathrm{E}(X)=m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

(2) 분산: $\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(3) 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 $aX+b$ (a, b는 상수, $a \ne 0$)에 대하여

(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, $(q=1-p)$

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}$$

정규분포

(1) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

(2) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n의 값이 충분히 크면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. $(q=1-p)$

2 통계적 추정

표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

표본평균의 분포

(1) 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, $\overline{X}$는 표본의 크기 n의 값에 관계없이 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(2) 모집단이 정규분포를 따르지 않아도 표본의 크기 n의 값이 충분히 크면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

모평균의 추정

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 모평균 m의 신뢰구간은

(1) 신뢰도 95 %: $\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99 %: $\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

표본비율의 분포

모비율이 p이고 표본의 크기 n의 값이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$에 가까워진다. $(q=1-p)$

모비율의 추정

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, n의 값이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰구간은 $(\hat{q}=1-\hat{p})$

(1) 신뢰도 95 %: $\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

(2) 신뢰도 99 %: $\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

| 용어와 기호 | 확률변수, 이산확률변수, 확률분포, 확률질량함수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 연속확률변수, 확률밀도함수, 정규분포, 표준정규분포, 표준화, 전수조사, 표본조사, 모집단, 표본, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, 모비율, 표본비율, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n, p)$, $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0, 1)$, $\overline{X}$, S^2, S, $\hat{p}$

수행 과제

● 수행 과제 의도

실제 자료를 활용해 신뢰도를 추정하고, 이를 확인하는 과정을 통해 통계적 추정이 실생활에서 유용하게 사용될 수 있음을 경험하도록 한다.

과제 1 _풀이

표본의 크기 $n=785$이고 표본비율 $\hat{p}=\frac{354}{785}$이므로

전체 산불의 원인 중에서 입산자 실화가 차지하는 비율의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\frac{354}{785}-2.58\sqrt{\frac{\frac{354}{785}\times\frac{431}{785}}{785}} \le p \le \frac{354}{785}+2.58\sqrt{\frac{\frac{354}{785}\times\frac{431}{785}}{785}}$$

따라서 $\mathbf{0.4051 \le p \le 0.4968}$

과제 2 _풀이

2000년부터 2010년까지 발생한 산불 발생 총 건수는 5508건이므로 입산자 실화 건수를 n이라고 하면,

$$5508 \times 0.4051 \le n \le 5508 \times 0.4968$$

따라서 $\mathbf{2231.3 \le n \le 2736.4}$

과제 3 _풀이

2000년부터 2010년까지 발생한 산불을 원인별로 분류하면 아래 표와 같다.

원인	건수(2000년~2010년)
입산자 실화	2345
논 · 밭두렁 소각	969
쓰레기 소각	490
어린이 불장난	126
담뱃불 실화	524
성묘객 실화	344
기타	710
합계	5508

따라서 전체 원인 중 입산자 실화가 차지하는 산불의 건수는 2345건으로 과제 2에서 추정한 범위에 포함된다.

교과서 154 쪽

대/단/원 평가 문제

Ⅲ. 통계

선택형

1 1, 2, 3, 4가 각각 적혀 있는 공 4개가 들어 있는 주머니에서 두 개의 공을 동시에 꺼내려고 한다. 꺼낸 공에 적힌 수 중에서 큰 수를 확률변수 X라고 할 때, X의 분산은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{11}{18}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

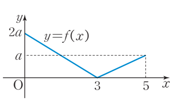
2 100원짜리 동전 두 개를 동시에 던지는 시행을 20번 반복할 때, 두 개 모두 같은 면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 Y가 $Y=(2X-1)^2$일 때, Y의 평균은?

① 371 ② 381 ③ 391
④ 401 ⑤ 411

3 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수 k에 대하여 k와 $(10-k)$가 서로소가 되는 사건을 A라고 하자. 150번 던져서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 기댓값은?

① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

4 연속확률변수 X에 대하여 $0\le X\le 5$이고 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같을 때, 확률 $P(2\le X\le 5)$는?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

5 어느 지역의 고등학교 학생 5000명의 몸무게는 평균이 60 kg, 표준편차가 4 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 몸무게가 54 kg 이하인 학생 수는?

① 140명 ② 188명 ③ 210명
④ 256명 ⑤ 334명

6 어떤 씨앗의 발아율은 90 %라고 한다. 이 씨앗을 100개 심었을 때, 발아한 씨앗이 96개 이상일 확률은?

① 0.0228 ② 0.0446 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3085

7 1, 3, 5, 7이 각각 적혀 있는 공 4개가 들어 있는 주머니에서 두 개의 공을 복원추출하여 공에 적혀 있는 수의 평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\overline{X}$의 분산은?

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

8 모집단의 확률변수 X가 정규분포를 따를 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 16인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 하자.

$$P(X\le 6)=P(\overline{X}\ge 9)$$

일 때, 모집단의 평균은?

① 7.2 ② 7.5 ③ 7.8
④ 8.1 ⑤ 8.4

2

목표| 확률변수 $aX+b$의 평균을 구할 수 있게 한다.

풀이| 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$E(X)=20\times\frac{1}{2}=10$,

$V(X)=20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=5$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=5+100=105$

$E(Y)=E((2X-1)^2)=E(4X^2-4X+1)$
$=4E(X^2)-4E(X)+1$
$=420-40+1=381$

답 ②

3

목표| 이항분포의 기댓값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수 k에 대하여 k와 $(10-k)$가 서로소가 되는 k는 1 또는 3이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(150, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 $E(X)=150\times\frac{1}{3}=50$

답 ③

대/단/원 평가 문제

1

목표| 확률변수 X의 확률분포를 구하고, 이를 이용하여 X의 분산을 구할 수 있게 한다.

풀이| X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{2}=\frac{10}{3}$

$V(X)$
$=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{10}{3}\right)^2$
$=\frac{5}{9}$

답 ②

4

목표| 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(0\le X\le 5)=1$이므로

$\frac{1}{2}\times 3\times 2a+\frac{1}{2}\times 2\times a=4a=1$에서 $a=\frac{1}{4}$

따라서 $x=2$에 대응하는 y의 값은 $\frac{1}{6}$이므로

$P(2\le X\le 5)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

답 ①

5

목표| 표준화를 이용하여 확률을 구해 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 학생의 몸무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(60, 4^2)$을 따르므로

$P(X\le 54)=P\left(Z\le\frac{54-60}{4}\right)=P(Z\le -1.5)$
$=0.5-P(0\le Z\le 1.5)=0.5-0.4332=0.0668$

따라서 구하는 학생 수는 $0.0668\times 5000=334$(명)

답 ⑤

교과서 155 쪽

[해답 p.179]

9 어느 고등학교의 방과 후 수업 신청률은 60 %라고 한다. 이 고등학교 학생 중에서 150명을 임의추출하였을 때, 방과 후 수업 신청 학생 수가 96명 이상일 확률은?

① 0.0228 ② 0.0446 ③ 0.0668 ④ 0.1587 ⑤ 0.3085

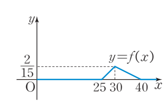
10 표준편차가 4인 모집단에서 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정하려고 한다. 신뢰구간의 길이가 1 이하가 되도록 하는 표본의 크기의 최솟값은?

① 196 ② 246 ③ 324 ④ 400 ⑤ 484

서답형

11 원점 O를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P는 주사위 한 개를 던져서 3의 배수의 눈이 나오면 3만큼, 3의 배수의 눈이 나오지 않으면 -2만큼 이동한다. 주사위를 30번 던져서 움직인 점 P의 좌표를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균을 구하여라.

12 채원이가 집에서 학교까지 가는 데 걸리는 시간을 X분이라고 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다고 한다. 학교 등교 시간이 8시까지일 때, 7시 30분에 집에서 출발한 채원이가 3일 중에서 2일 이상 지각할 확률을 구하여라.



13 어느 홍삼 음료 회사에서 만드는 음료 1병에 들어가는 홍삼의 양은 표준편차가 2 mg인 정규분포를 따른다고 한다. 생산된 음료 중에서 100병을 임의추출하여 홍삼의 양을 조사하였더니 표본평균이 30 mg이었다고 할 때, 이 회사에서 만드는 음료 1병에 들어가는 홍삼의 양의 평균의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여라.

14 어느 지역에서 임의추출한 100가구 중에서 80가구가 한 달에 1번 이상 외식을 하였다고 할 때, 이 지역 전체 가구 중에서 한 달에 1번 이상 외식하는 가구 비율의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

서술형

15 타율이 2할인 야구 선수가 100번의 타석에서 28번 이상 안타를 칠 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

서술형

16 어느 농장에서 생산되는 딸기 한 개의 무게는 평균이 50 g, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서는 딸기 100개를 한 상자에 포장하는데 상자 안에 들어 있는 딸기 전체의 무게가 4.7 kg 이하이면 불량품으로 분류한다. 이 농장에서 생산된 200만 개의 딸기를 한 상자에 100개씩 포장하였을 때, 불량품으로 판정될 상자의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

6

목표| 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 씨앗을 100개 심었을 때 발아한 씨앗의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{9}{10}\right)$를 따르므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(90, 3^2)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 96)&=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{96-90}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

답 ①

7

목표| 모평균의 분산을 이용하여 표본평균의 분산을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주머니에서 1개의 공을 꺼냈을 때, 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라고 하면 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}=4,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=(1-4)^2\times\frac{1}{4}+(3-4)^2\times\frac{1}{4}+(5-4)^2\times\frac{1}{4}\\&\quad+(7-4)^2\times\frac{1}{4}=5\end{aligned}$$

이므로 표본평균 $\overline{X}$의 분산 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{2}=\frac{5}{2}$ 답 ⑤

8

목표| 모집단이 정규분포를 따를 때, 모평균을 구할 수 있게 한다.

풀이| 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 하면, 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\leq 6)=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{6-m}{\sigma}\right)$이고

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 9)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{9-m}{\frac{\sigma}{4}}\right)$이므로 $\frac{6-m}{\sigma}=-\frac{9-m}{\frac{\sigma}{4}}$

에서 $m=8.4$ 답 ⑤

9

목표| 표본비율의 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| $p=0.6$, $n=150$이고 n이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.6, \frac{0.6\times 0.4}{150}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.6, (0.04)^2)$에 가까워진다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\geq\frac{96}{150}\right)&=\mathrm{P}(\hat{p}\geq 0.64)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{0.64-0.6}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 1)=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 ④

10

목표| 모평균의 신뢰구간을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 표본의 크기를 n이라고 하면 신뢰도가 95 %일 때 모평균 m의 신뢰구간은

$$\overline{X}-1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}\leq m\leq \overline{X}+1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}$$

$2\times1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le1$이므로 $\sqrt{n}\ge15.68$

따라서 $n\ge245.8624$이므로 구하는 표본의 크기의 최솟값은 246이다. 답 ②

11

목표| 확률변수 $aX+b$의 평균을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주사위를 30번 던져 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때 점 P의 좌표를 확률변수 Y라고 하면

$Y=3X+(-2)(30-X)=5X-60$이므로

$E(Y)=E(5X-60)=5E(X)-60$

$=5\times10-60=-10$ 답 -10

12

목표| 확률밀도함수의 성질과 독립시행의 확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 학교까지 가는 데 걸리는 시간이 30분이 넘으면 지각을 하므로 지각할 확률은

$P(X>30)=\frac{1}{2}\times10\times\frac{2}{15}=\frac{2}{3}$

따라서 채원이가 3일 중에서 2일 이상 지각할 확률은 독립시행의 확률에 의하여

${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{20}{27}$ 답 $\frac{20}{27}$

13

목표| 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| $n=100$, $\overline{X}=30$, $\sigma=2$이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$30-1.96\frac{2}{\sqrt{100}}\le m\le30+1.96\frac{2}{\sqrt{100}}$

따라서 $29.608\le m\le30.392$ 답 $29.608\le m\le30.392$

14

목표| 모비율의 신뢰구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| $n=100$, $\hat{p}=\frac{80}{100}=0.8$이므로 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.8-2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}\le p\le0.8+2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}$

따라서 $0.6968\le p\le0.9032$ 답 $0.6968\le p\le0.9032$

15

목표| 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있게 한다.

풀이| 이 선수가 100번의 타석에서 안타를 친 횟수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$, $V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $N(20, 4^2)$에 가까워지므로

$P(X\ge28)=P\left(Z\ge\frac{28-20}{4}\right)=P(Z\ge2)$

$=0.5-P(0\le Z\le2)=0.5-0.4772$

$=0.0228$ 답 0.0228

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	확률변수 X가 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따름을 알기	30%
	확률변수 X가 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따름을 알기	40%
답 구하기	확률 구하기	30%

16

목표| 모집단이 정규분포를 따를 때, 표본평균의 확률을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 한 상자에 담겨 있는 딸기 100개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(50, 1^2)$을 따른다.

딸기 100개의 무게가 4.7 kg 이하이려면

$\overline{X}\le\frac{4700}{100}=47$이어야 하므로

$P(\overline{X}\le47)=P\left(Z\le\frac{47-50}{1}\right)=P(Z\le-3)$

$=0.5-P(0\le Z\le3)=0.5-0.4987$

$=0.0013$

따라서 200만 개의 딸기를 한 상자에 100개씩 포장하면 2만 상자이므로 이 상자 중에서 불량품으로 판정되는 상자의 수는 $20000\times0.0013=26$ 답 26

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	확률변수 $\overline{X}$가 정규분포 $N(50, 1^2)$을 따름을 알기	40%
	$P(\overline{X}\le47)$ 구하기	30%
답 구하기	불량품으로 판정되는 상자의 수 구하기	30%

교과서 156 쪽

M+ Engineering

수 학 + 공 학

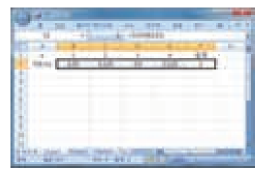
이산확률변수의 평균, 분산 및 표준편차 구하기

108쪽의 예제 3에서 주어진 이산확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 다음과 같이 컴퓨터 프로그램을 이용하여 구할 수 있다.

1 \ 확률분포를 입력하여 보자.

① A1 셀에 'x'를 입력하고 B1, C1, D1, E1 셀에 확률변수 X가 가지는 값을 각각 입력한다. 또 F1 셀에 '합계'를 입력한다.

② A2 셀에 'P($X=x$)'를 입력하고 B2, C2, D2, E2 셀에 각각의 확률을 입력한다. 그리고 B2~E2 셀을 선택한 후 '수식' 메뉴의 합계($\sum$) 아이콘을 누르면 F2 셀에 SUM(B2:E2), 즉 B2 셀부터 E2 셀까지의 합이 계산된다.



교과서 157 쪽

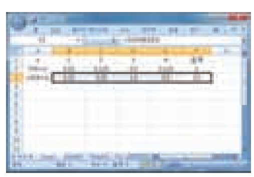
2 \ 평균을 구하여 보자.

① A3 셀에 '$x\cdot$P($X=x$)'를 입력한다.

② B3 셀에 '=B1*B2'를 입력하고, Enter 키를 누른다.

③ B3 셀의 채우기 핸들을 이용하여 C3, D3, E3 셀에 각각 $x\cdot$P($X=x$)의 값을 채워 넣는다.

④ B3~E3 셀을 선택한 후 합계($\sum$) 아이콘을 누르면 F3 셀에 SUM(B3:E3), 즉 E(X)의 값이 계산된다.



3 \ 분산과 표준편차를 구하여 보자.

① A4 셀에 '$x^2\cdot$P($X=x$)'를 입력한다.

② B4 셀에 '=B1^2*B2'를 입력하고, Enter 키를 누른다.

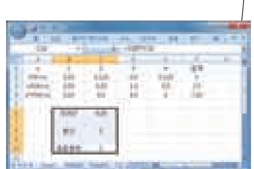
③ B4 셀의 채우기 핸들을 이용하여 C4, D4, E4 셀에 각각 $x^2\cdot$P($X=x$)의 값을 채워 넣는다.

④ B4~E4 셀을 선택한 후 합계($\sum$) 아이콘을 누르면 F4 셀에 SUM(B4:E4), 즉 E(X^2)의 값이 계산된다.

⑤ B6 셀에 '{E(X)}^{2}'을 입력하고, C6 셀에 '=F3^2'를 입력한다.

⑥ B8 셀에 '분산'을 입력하고, C8 셀에 '=F4−C6'을 입력한다. 이렇게 하면 C8 셀에 분산이 계산된다.

⑦ B10 셀에 '표준편차'를 입력하고, C10 셀에 '=SQRT(C8)'을 입력한다. 이렇게 하면 C10 셀에 표준편차가 계산된다.



수 학 + 공 학

교과서 158 쪽

M+ Engineering

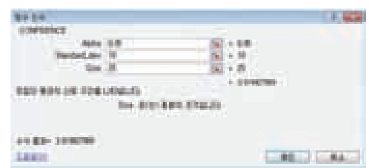
수 학 + 공 학

신뢰구간 구하기

143쪽의 예제 1에서 돼지고기 1인분의 평균 무게의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 다음과 같이 컴퓨터 프로그램을 이용하여 구할 수 있다.

1\ '수식' 메뉴에서 '함수 삽입'을 클릭하면 '함수 마법사' 창이 나타난다. 이때 범주 선택에서 '통계'를, 함수 선택에서 'CONFIDENCE'를 선택한 후 확인을 클릭하면 '함수 인수' 창이 나타난다.

2\ Alpha에 '1−(신뢰도)', Standard_dev에 '표준편차', Size에 '표본의 크기'를 입력한다. 여기서는 신뢰도가 95 %, 표준편차가 10, 표본의 크기가 25인 경우이므로 다음과 같이 입력한다.



3\ 확인을 누르면 그 수식의 결과인 3.919927969가 셀에 입력된다. 여기서 소수 셋째 자리에서 반올림하여 얻은 3.92를 이용하여 신뢰구간을 구할 수 있다.

4\ 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$195-3.92 \le m \le 195+3.92, \text{ 즉 } 191.08 \le m \le 198.92$$

교과서 159 쪽

선거 여론 조사

역사적으로 기록된 최초의 선거 여론 조사는 1824년 미국 대통령 선거에서 시작되었다. 당시 4명의 대통령 후보가 출마하였는데, '해리스버그 펜실베이니언'이라는 신문에서 기자들을 현장에 보내 여론을 청취하여 그 결과를 신문지상에 처음으로 발표하였다. 기자들이 몇몇 사람을 조사한 결과 잭슨 후보가 당선될 것이라고 예측하였는데, 실제로는 아무도 다수표를 얻지 못해 의회에서 결선 투표가 이루어졌고 결국 대통령에는 아담스 후보가 당선되었다. 기자들이 몇 사람의 의견만 듣고 당선자를 예측하였으니 정확성이 떨어질 수밖에 없었을 것이다.

선거 여론 조사는 조사 방법론에 대한 연구가 본격화된 20세기에 이르러서야 자리를 잡게 된다. 미국에서 발행되는 '리터러리 다이제스트'라는 잡지는 전화번호부와 자동차 등록부를 이용하여 선정된 조사 응답자들을 상대로 우편엽서를 통한 여론 조사를 실시하여 1920년, 1924년, 1928년, 1932년 대통령 선거에서 선출될 후보를 정확하게 예측하였다.

그런데 똑같은 방법으로 표본을 삼아 실시된 여론 조사가 1936년 선거에서 문제를 일으키고 만다. 이 잡지는 당시에도 1000만 명의 유권자에게 설문지를 발송해서 회수된 230만 장을 집계하여 예측한 공화당의 랜던 후보의 압도적인 승리를 대대적으로 보도하였다. 그러나 결과는 민주당의 루즈벨트 후보의 압승이었다. 예측이 빗나간 원인은 표본이 전화 가입자와 자동차 소유자인 것에 있었다. 미국 역사상 최악의 경제 불황의 말기였던 시기에 지나칠 정도로 부유한 표본을 선정하였던 것이다. 표본은 빈민층을 전혀 포함하지 못하였고, 많은 수의 빈민층은 루즈벨트의 뉴딜 경기 회복 프로그램을 지지하였다. 따라서 예측이 틀릴 수밖에 없었던 것이다.

반면 같은 선거에서 '조지 갤럽'은 불과 5000명을 조사하고도 루즈벨트가 랜던을 이기리라는 것을 정확하게 예측하였는데, 그 이유는 '할당 표본 추출'을 이용하여 모집단의 특성에 따라 표본을 선정하였기 때문이다. 갤럽은 전국에서 각 소득 계층의 수를 파악하여 응답자가 각 계층에서의 정확한 비율을 나타내도록 표본을 선정하였다. 갤럽은 이 방법으로 선거 여론 조사를 하여 1940년, 1944년에도 당선자를 정확하게 예측할 수 있었다.

이처럼 여론 조사는 조사 대상자를 어떻게 선정하는지에 따라 그 결과가 달라지는데, 옳은 예측을 위해서는 모집단의 특성을 잘 반영할 수 있도록 표본을 선정해야 한다.

수 학 + 실 생 활

M+ Real Life

● 수학 용어

용어	외국어	한자
〈ㄱ〉		
가정	hypothesis	假定
감소	decreasing	減少
거듭제곱근	radical root	
결론	conclusion	結論
(집합의) 결합법칙	associative law	結合法則
계수	coefficient	係數
계승	factorial	階乘
곱의 법칙	multiplication principle	
공간벡터	space vector	
공간좌표	coordinates in space	空間座標
공비	common ratio	公比
공역	codomain	共域
공집합	empty set	空集合
공차	common difference	公差
교선	line of intersection	交線
교집합	intersection	交集合
(집합의) 교환법칙	commutative law	交換法則
구간	interval	區間
구분구적법	quadrature by parts	區分求積法
귀납적 정의	inductive definition	歸納的定義
귀류법	reduction to absurdity	歸謬法
극값	extreme values	
극대	local maximum	極大
극댓값	local maximum	
극소	local minimum	極小
극솟값	local minimum	
극한(값)	limit (value)	極限
근	root	根
근의 공식	quadratic formula	根ー 公式
근호	radical sign	根號
급수	series	級數
급수의 합	sum of series	級數ー 合
기댓값	expected value	
기울기	slope	
〈ㄴ〉		
나머지정리	remainder theorem	
내분	internal division	內分
내적	inner product	內積
〈ㄷ〉		
다항식	polynomial	多項式
다항함수	polynomial function	多項函數
단위벡터	unit vector	
단항식	monomial	單項式
닫힌 구간	closed interval	
대우	contraposition	對偶
대응	correspondence	對應
대입	substitution	代入
대칭이동	reflection	對稱移動
덧셈정리	addition theorem	
도함수	derivatives	導函數
독립	independence	獨立
독립시행	independent trials	獨立試行
동경	radius	動徑
동류항	similar term	同類項
두 점 사이의 거리	distance between two points	
드모르간의 법칙	De Morgan's law	
등비급수	geometric series	等比級數
등비수열	geometric sequence	等比數列
등비중항	geometric means	等比中項
등차수열	arithmetic sequence	等差數列
등차중항	arithmetic means	等差中項
〈ㄹ〉		
라디안	radian	
로그	logarithm	
로그함수	logarithmic function	
롤의 정리	Rolle's theorem	
〈ㅁ〉		
매개변수	parameter	媒介變數
명제	proposition	命題
모분산	population variance	母分散
모비율	population ratio	母比率
모집단	population	母集團
모평균	population mean	母平均
모표준편차	population standard deviation	母標準偏差
무리수	irrational number	無理數

용어	외국어	한자
무리식	irrational expression	無理式
무리함수	irrational function	無理函數
무한대	infinity	無限大
미분가능	differentiable	微分可能
미분계수	derivative	微分係數
미적분의 기본 정리	fundamental theorem of calculus	微積分－基本定理
미정계수법	method of undetermined coefficients	未定係數法
미지수	unknown	未知數
(로그의) 밑	base	
〈ㅂ〉		
반닫힌(반열린) 구간	half closed(open) interval	
발산	divergence	發散
방향벡터	direction vector	
배반사건	exclusive events	排反事件
법선벡터	normal vector	
벡터	vector	
벡터의 성분	component of vector	
벡터의 크기	norm of vector	
벤 다이어그램	Venn diagram	
변곡점	point of inflection	變曲點
복소수	complex number	複素數
부등식	inequality	不等式
부분적분법	integration by parts	部分積分法
부분집합	subset	部分集合
부분합	partial sum	部分合
부정	negation	否定
부정적분	indefinite integral	不定積分
분모의 유리화	rationalization of denominator	分母—有理化
(집합의) 분배법칙	distributive law	分配法則
불연속	discontinuous	不連續
〈ㅅ〉		
사이값 정리	intermediate value theorem	
사인	sine	
사인함수	sine function	
삼각비	trigonometric ratio	三角比
삼각함수	trigonometric function	三角函數
삼수선의 정리	theorem of three perpendiculars	三垂線—定理
상수함수	constant function	常數函數

용어	외국어	한자
상수항	constant term	常數項
상용로그	common logarithm	
(집합의) 서로소	disjoint	
수렴	convergence	收斂
수열	sequence	數列
수학적 귀납법	mathematical induction	數學的歸納法
수학적 확률	mathematical probability	數學的確率
순간변화율	instantaneous rate of change	瞬間變化率
순서쌍	ordered pair	順序雙
순열	permutation	順列
시점	initial point	始點
시초선	ray	始初線
시행	trial	試行
식의 값	numerical value of expression	
신뢰구간	confidence interval	信賴區間
신뢰도	confidence coefficient	信賴度
실근	real root	實根
실수	real number	實數
실수배	real number multiple	實數倍
실수부분	real part	實數部分
쌍곡선	hyperbola	雙曲線
쌍곡선의 꼭짓점	vertex of hyperbola	
쌍곡선의 점근선	asymptotic line of hyperbola	雙曲線—漸近線
쌍곡선의 주축	principal axis of hyperbola	雙曲線—主軸
쌍곡선의 중심	center of hyperbola	雙曲線—中心
쌍곡선의 초점	focus of hyperbola	雙曲線—焦點
〈ㅇ〉		
x절편	x-intercept	
x좌표	x-coordinate	
x축	x-axis	
여사건	complementary event	餘事件
여집합	complement	餘集合
역	converse	逆
역함수	inverse function	逆函數
연립일차방정식	simultaneous linear equations	聯立一次方程式
연립일차부등식	simultaneous linear inequalities	聯立一次不等式
연속	continuous	連續
연속함수	continuous function	連續函數

용어	외국어	한자
연속확률변수	continuous random variable	連續確率變數
열린 구간	open interval	
영벡터	zero vector	
y절편	y-intercept	
y좌표	y-coordinate	
y축	y-axis	
완전제곱식	perfect square(expression)	
외분	external division	外分
우극한	right-handed limit	右極限
원소	element	元素
원순열	circular permutation	圓順列
원점	origin	原點
위치벡터	position vector	
유리식	rational expression	有理式
유리함수	rational function	有理函數
음함수	implicit function	陰函數
이계도함수	second order derivatives	二階導函數
이면각	dihedral angle	二面角
이면각의 면	faces of a dihedral angle	二面角— 面
이면각의 변	edge of dihedral angle	二面角— 邊
이면각의 크기	measure of a dihedral angle	
이산확률변수	discrete random variable	離散確率變數
이차곡선	quadratic curve	二次曲線
이차방정식	quadratic equation	二次方程式
이차함수	quadratic function	二次函數
이항	transposition	移項
이항계수	binomial coefficient	二項係數
이항분포	binomial distribution	二項分布
이항정리	binomial theorem	二項定理
인수	factor	因數
인수분해	factorization	因數分解
인수정리	factor theorem	因數定理
일대일 대응	one to one correspondence	一對一對應
일대일함수	one to one function	一對一函數
일반각	general angle	一般角
일반항	general term	一般項
일차방정식	linear equation	一次方程式
일차부등식	linear inequality	一次不等式

용어	외국어	한자
일차함수	linear function	一次函數
임의추출	random sampling	任意抽出
〈ㅈ〉		
자연로그	natural logarithm	
자연수의 분할	partitions of natural number	自然數— 分割
적분상수	integral constant	積分常數
전개	expansion	展開
전개식	expansion	展開式
전수조사	total inspection	全數調査
전체집합	universal set	全體集合
절대부등식	absolute inequality	絕對不等式
정규분포	normal distribution	正規分布
정리	theorem	定理
정사영	orthogonal projection	正射影
정의	definition	定義
정의역	domain	定義域
정적분	definite integral	定積分
제곱근	square root	
조건	condition	條件
조건부확률	conditional probability	條件附確率
조립제법	synthetic division	組立除法
조합	combination	組合
종속	dependence	從屬
종점	terminal point	終點
좌극한	left-handed limit	左極限
좌표	coordinate	座標
좌표공간	coordinate space	座標空間
좌표축	coordinate axis	座標軸
좌표평면	coordinate plane	座標平面
주기	period	週期
주기함수	periodic function	週期函數
중근	multiple root	重根
중복순열	repeated permutation	重複順列
중복조합	repeated combination	重複組合
중점	midpoint	中點
증가	increasing	增加
증명	proof	證明
증분	increment	增分

용어	외국어	한자
지수함수	exponential function	指數函數
진리집합	truth set	眞理集合
진부분집합	proper subset	眞部分集合
진수	antilogarithm	眞數
집합	set	集合
집합의 분할	partition of a set	集合—分割
〈ㅊ〉		
차수	degree	次數
차집합	difference set	差集合
최대 · 최소 정리	maximum−minimum theorem	最大最小定理
최댓값	absolute maximum	最大
최솟값	absolute minimum	最小
추정	estimation	推定
충분조건	sufficient condition	充分條件
치역	range	値域
치환적분법	integration by substitution	置換積分法
〈ㅋ〉		
켤레복소수	complex conjugates	
코사인	cosine	
코사인함수	cosine function	
큰 수의 법칙	law of large numbers	
〈ㅌ〉		
타원	ellipse	楕圓
타원의 꼭짓점	vertex of ellipse	
타원의 단축	minor axis of ellipse	楕圓— 短軸
타원의 장축	major axis of ellipse	楕圓— 長軸
타원의 중심	center of ellipse	楕圓— 中心
타원의 초점	focal point of ellipse	楕圓— 焦點
탄젠트	tangent	
탄젠트함수	tangent function	
통계적 확률	statistical probability	統計的 確率
〈ㅍ〉		
파스칼의 삼각형	Pascal's triangle	
판별식	discriminant	判別式
평균값 정리	mean value theorem	
평균변화율	mean rate of change	平均變化率
평면벡터	plane vector	
평행이동	translation	平行移動

용어	외국어	한자
포물선	parabola	抛物線
포물선의 꼭짓점	vertex of parabola	
포물선의 준선	directrix of parabola	抛物線— 準線
포물선의 초점	focal point of parabola	抛物線— 焦點
포물선의 축	axis of parabola	抛物線— 軸
표본	sample	標本
표본분산	sample variance	標本分散
표본비율	sample rate	標本比率
표본조사	sample survey	標本調査
표본평균	sample mean	標本平均
표본표준편차	sample standard deviation	標本標準偏差
표준정규분포	standard normal distribution	標準正規分布
표준화	standardization	標準化
피타고라스 정리	Pythagorean theorem	
필요조건	necessary condition	必要條件
필요충분조건	necessary and sufficient condition	必要充分條件
〈ㅎ〉		
함수의 그래프	graph of a function	
합성함수	composite function	合成函數
합의 법칙	addition principle	
합집합	union	合集合
항	term	項
항등식	identity	恒等式
항등함수	identity function	恒等函數
해	root	解
허근	imaginary root	虛根
허수	imaginary number	虛數
허수단위	imaginary unit	虛數單位
허수부분	imaginary part	虛數部分
호도법	circular measure	弧度法
확률밀도함수	probability density function	確率密度函數
확률변수	random variable	確率變數
확률분포	probability distribution	確率分布
확률질량함수	probability mass function	確率質量函數

집필진 소개

신항균
현 서울교육대학교 총장

이광연
현 한서대학교 교수

박세원
현 신경대학교 교수

신범영
현 청담중학교 교감

이계세
현 경기도학생교육원 교육연구사

김정화
현 서울고등학교 교사

박문환
현 인천인제고등학교 교사

윤정호
현 대구과학고등학교 교사

박상의
현 장충고등학교 교사

서원호
현 청원고등학교 교감

전제동
현 창원중앙고등학교 교사

이동흔
현 숭문고등학교 교사

만든 사람들
개발 책임 김경수
편집 윤준원, 최윤정
아트 디렉터 허영인
표지 디자인 김의수
본문 디자인 유지인
컷 김상준, 이도훈
조제판 벽호미디어

고등학교 확률과 통계 교사용 지도서

2015. 3. 1. 초판 발행 정가 원

지은이 신항균 외 11인
발행인 (주)지학사 서울시 마포구 신촌로6길 5
인쇄인 (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43
내용 관련 문의 (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의 (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내 누리집 주소 www.ktbook.com 전화 031-8071-7981~4 (사)한국검인정교과서

ISBN 978-89-05-04256-1 53410

이 교사용 지도서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용했습니다.
교사용 지도서에 대한 문의 사항이나 의견이 있는 분은 한국교과서연구재단이 운영하는 **교과서민원바로처리센터**(전화 1566-8572, 누리집 주소 http://www.textbook114.com 또는 http://www.교과서114.com)에 문의하여 주시기 바랍니다.

이 도서에 게재된 저작물에 대한 보상금은 문화체육관광부장관이 정하는 기준에 따라 **사단법인 한국복제전송저작권협회**(전화 02-2608-2800, 누리집 주소 http://www.korra.kr)에서 저작재산권자에게 지급합니다.

고|등|학|교 확률과 통계

53410

9 788905 042561

ISBN 978-89-05-04256-1